V. Ilín. E. Pozniak

FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

1

EDITORIAL - MIR - MOSCÚ

FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

В. А. Ильин, Э. Г. Позняк

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

в 3 томах

Том 1

Москва
«Наука»

V. Ilín, E. Pozniak

FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

En 3 tomos

1



EDITORIAL MIR MOSCÚ

Traducido del ruso por la licenciada en matemáticas aplicadas M. Andriánova

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-002061-6

ISBN 5-03-002060-8

INDICE

Capítulo 1

NOCIONES PRELIMINARES SOBRE CONCEPTOS FUNDAMENTALES DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

§ 1. Conceptos matemáticos que surgen al describir el movimiento

1. Las Matemáticas estudian relaciones cuantitativas y formas espaciales del mundo circundante.

La matemática elemental se limita a un estudio primario de relaciones cuantitativas y formas espaciales, puesto que opera principalmente con *magnitudes constantes* y figuras geométricas más simples (triángulos, circunferencias, etc.). Los conceptos y métodos de la matemática elemental son insuficientes para describir el movimiento mecánico y otros procesos que se realizan en el tiempo. Aclaremos cuáles conceptos matemáticos nuevos son necesarios para esto *).

2. Con todo proceso está relacionado el concepto de una *magnitud variable*, es decir, una magnitud tal que en las condiciones del proceso dado toma diferentes valores. Además, todo proceso se caracteriza, al menos, por dos magnitudes variables *cuyas variaciones se vinculan mutuamente*.

Por ejemplo, consideremos el movimiento mecánico del punto material por una línea recta. Este movimiento es un proceso de variación de la posición del punto en la línea recta en el tiempo. Con dicho proceso están ligadas dos magnitudes variables: el tiempo y el camino recorrido por el punto a partir del punto de referencia. Para caracterizar el movimiento considerado hay que saber a qué distancia del punto de referencia se halla el punto en todo momento dado de tiempo, es decir, hay que saber la *dependencia entre el camino recorrido por el punto y el tiempo*. En la mecánica esta dependencia se denomina *ley de movimiento*. En otras palabras, la ley de movimiento es una regla por medio de la cual a todo valor del tiempo x se le pone en correspondencia un valor determinado del camino y recorrido por el punto durante el tiempo x.

Las dependencias de este tipo entre dos variables x e y (cuando a todo valor de la variable x se le pone en correspondencia un valor determinado de la variable y) se presentan tanto al considerar el movimiento mecánico del punto material como al describir otros procesos físicos. Abstrayéndose del contenido físico concreto de las variables x e y, llegamos a uno de los conceptos matemáticos más importantes, *concepto de función* **).

---

*) Al mismo tiempo, no aspiraremos a formulaciones exactas sino trataremos sólo de aclarar el conjunto de problemas de los cuales se tratará en adelante.

**) La introducción en las Matemáticas del concepto de función se relaciona con el nombre del gran científico inglés Isaac Newton (1642—1727).

Si se sabe la regla por medio de la cual a todo valor de una variable x se le pone en correspondencia un valor determinado de una variable y, entonces se dice que la variable y es función de la variable x.

Además, la variable x se denomina *argumento* de la función considerada y el valor de la variable y que corresponde al x dado se llama *valor particular* de la función en el punto x.

Para denotar las funciones se utilizan los siguientes símbolos:

$$y = y(x) \quad \text{o bien} \quad y = f(x).$$

En la última denotación la letra f llamada característica de la función simboliza la regla mencionada anteriormente. Si se consideran funciones diferentes, entonces para designar sus características se usan letras diferentes. Subrayemos que para denotar el argumento y la función no es necesario emplear las letras x e y. Por ejemplo, la denotación $S = h(t)$ significa que la variable S es función del argumento t con la particularidad de que la característica de esta función se denota con la letra h.

Tanto la magnitud variable como la función se caracterizan habitualmente por diferentes *valores numéricos*. Por eso la profundización de las ideas de estos conceptos está estrechamente relacionada con la necesidad de desarrollar la teoría de los números reales *).

Consideremos algunos ejemplos de funciones.

1) Se sabe que el camino S recorrido por el punto material inicialmente inmóvil que cae bajo la acción de la fuerza de gravedad durante el tiempo t, se determina por la fórmula

$$S = gt^2/2.$$

Esta fórmula es la regla por medio de la cual a todo valor de la variable t se le pone en correspondencia un valor de la variable S, o sea, regla que define S como función del argumento t.

2) Según la ley de Coulomb dos cargas unitarias de signos opuestos que están situadas una de otra a la distancia r, se atraen con la fuerza

$$F = c/r^2,$$

donde c es una constante. Esta fórmula es también una regla por medio de la cual a todo valor de la variable r se le pone en correspondencia un valor de la variable F, o sea, F se define como función del argumento r.

*) Hay que señalar que los conceptos de función y de número se refieren a los llamados *conceptos iniciales*. Se puede explicar cada uno de los conceptos iniciales, pero toda tentativa de definir un concepto inicial se reduce a sustituir el concepto que se define por otro equivalente. El lector conoce los conceptos iniciales del curso elemental. Por ejemplo, los conceptos de línea recta y de plano se refieren a los conceptos iniciales.

En dos ejemplos aducidos la regla para poner en correspondencia el argumento y la función se representa *empleando fórmulas.* Este método de representar la función se denomina *analítico.*

A la par con éste existen otros métodos. Señalemos algunos de ellos. En la práctica de mediciones físicas es muy utilizable el *método tabular* para representar una función cuando los valores del argumento y valores correspondientes de la función se ponen en forma de tabla. Frecuentemente la dependencia entre el argumento y la función se representa mediante la gráfica que, por ejemplo, se obtiene en el oscilógrafo. Este método se denomina *gráfico* *).

3. A veces, en la física surge la necesidad de estudiar una función $y = f(x)$ cuyo argumento x es por sí mismo una función $x = \varphi(t)$ de otro argumento t. En este caso se dice que y es la *función compuesta del argumento* t y x se denomina *argumento intermedio.* Se puede escribir esta función compuesta en la forma siguiente: $y = f[\varphi(t)]$.

Consideremos el siguiente ejemplo.

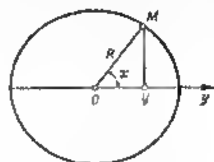


Fig. 1.1

Sea que un punto material M gira uniformemente por una circunferencia de radio R con la velocidad angular ω (fig. 1.1). Determinemos la regla del movimiento de la proyección y de este punto sobre el eje Oy que se encuentra en el plano de la circunferencia y pasa por su centro O. Además, tomemos que en el momento de tiempo $t = 0$ el punto M está situado en el eje Oy. Denotemos con y la coordenada de la proyección considerada en el eje Oy y con x, el ángulo $\angle MOy$. Es evidente que $y = R \cos x$. Por otra parte, debido a que el punto se mueve por la circunferencia con la velocidad angular ω y en el momento de tiempo $t = 0$ se encuentra en el eje Oy, entonces $x = \omega t$. De este modo, y es la *función compuesta del argumento* t, es decir, $y = R \cos x$, donde $x = \omega t$, o bien $y = R \cos \omega t$. Notemos que en la mecánica el movimiento según la ley $y = R \cos \omega t$ se denomina *oscilación armónica.*

§ 2. Velocidad instantánea y nuevos conceptos matemáticos relacionados con ella

1. Sea que la función $y = f(x)$ es la ley del movimiento de un punto material por el eje Oy. Para caracterizar el movimiento desempeña un papel importante el concepto de *velocidad media.* Calcu-

*) Para más detalles sobre los métodos de representar la función véase el cap. 4.

lemos la velocidad media del punto en movimiento v_{med} en el intervalo temporal desde x hasta $x + \Delta x$, donde x es un momento fijado de tiempo, Δx es un incremento de tiempo. Ya que en el momento de tiempo x el punto en movimiento está a la distancia $f(x)$ del origen de referencia y en el momento $x + \Delta x$, a la distancia $f(x + \Delta x)$, el camino Δy recorrido por el punto en el tiempo Δx es igual a $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Por eso, la velocidad media v_{med} es igual a

$$v_{med} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Ya que el momento de tiempo x está fijado, de la última fórmula se deduce que v_{med} es función del argumento Δx. Para caracterizar el movimiento no uniforme, a la par con la velocidad media desempeña un gran papel el concepto de *velocidad instantánea* en el momento dado de tiempo x.

Se denomina *velocidad instantánea* (o simplemente *velocidad*) en un momento de tiempo x el número al que se aproxima el valor de la velocidad media

$$v_{med} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

cuando el intervalo de tiempo Δx tiende a cero.

El concepto físico de velocidad instantánea da origen al concepto matemático importante de *derivada*. Al abstraerse del sentido físico concreto de la función $y = f(x)$ denominaremos *derivada* de esta función en un punto fijado x al límite al que tiende la fracción $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, cuando Δx tiende a cero.

La operación de hallar la derivada suele llamarse *diferenciación*. La derivada de la función $y = f(x)$ en un punto fijado dado se denota por el símbolo $y'(x)$ o $f'(x)$. Empleando el símbolo conocido para designar el límite se puede escribir

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Consideremos algunos ejemplos.

1) Calculemos la velocidad instantánea del punto material que cae por la acción de la fuerza de gravedad. Por cuanto la ley del movimiento de este punto se determina por la función $S = gt^2/2$, entonces el camino ΔS, recorrido por el punto en un intervalo de tiempo de t a $t + \Delta t$, es igual a

$$\Delta S = \frac{g(t + \Delta t)^2}{2} - \frac{gt^2}{2} = gt\,\Delta t + \frac{g}{2}(\Delta t)^2.$$

Por eso la velocidad media en este mismo intervalo de tiempo es igual a

$$v_{med} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = gt + \frac{g}{2}\Delta t.$$

Por consiguiente, en el momento fijado de tiempo t, la velocidad instantánea v es igual a

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(gt + \frac{g}{2} \Delta t \right) = gt.$$

De hecho, hemos calculado la derivada de la función $S = gt^2/2$ y, por tanto, podemos escribir $S' = gt$.

2) Calculemos la derivada de la función $y = x^n$, donde n es un número positivo entero. Al fijar x y tomar un Δx arbitrario empleando el binomio de Newton obtenemos

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n.$$

Por eso, la velocidad media $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de la variación de la función $y = f(x)$ en el segmento de x a $x + \Delta x$ es igual a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}.$$

Por consiguiente, en el punto fijado dado x, la derivada es igual a

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1} \right] = nx^{n-1}.$$

Como hemos visto, el concepto de límite de la función desempeña el papel fundamental en el cálculo de derivadas. Es necesario precisar este concepto, en primer lugar, para aclarar más detalladamente el propio concepto de función, magnitud variable y número real.

2. Ahora podemos convencernos de que en el proceso de calcular las derivadas de las funciones elementales surgen nuevos problemas matemáticos.

Pasemos a calcular la derivada de la función $y = \operatorname{sen} x$. Fijando x y tomando Δx arbitrario, obtenemos

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x = 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}.$$

De aquí

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\operatorname{sen}(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}.$$

De este modo, para calcular la derivada de la función $y = \operatorname{sen} x$ en el punto x hay que hallar el siguiente límite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\operatorname{sen}(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)} \right]. \qquad (1.1)$$

Es lógico esperar que para un x fijado

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x. \tag{1.2}$$

Sin embargo, no toda función $y = f(x)$ posee la propiedad

$$\lim_{\Delta x \to 0} f\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = f(x).$$

En realidad, esta propiedad significa que si el argumento de una función tiende al número x, entonces el valor correspondiente a esta función tiende al número $f(x)$. Las funciones que poseen esta propiedad se denominan *continuas* (en el punto x). El concepto de *continuidad* de la función es uno de los conceptos matemáticos más importantes.

Para calcular el límite (1.1) hace falta calcular el límite (1.2) y, además, el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}. \tag{1.3}$$

Este límite desempeña un papel importante en el análisis matemático. Frecuentemente se denomina *primer límite notable*. Se demuestra que este límite es igual a la unidad y, por eso, el límite (1.1) es igual a $\cos x$.

Así pues,

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x.$$

Como segundo ejemplo, calculemos la derivada de la función $y = \log_a x$. Fijando $x > 0$ y tomando un Δx arbitrario (tal que $x + \Delta x > 0$), obtenemos

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

De aquí,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\left[\frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{x} \log_a \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right].$$

De este modo, para calcular la derivada de la función $y = \log_a x$ en el punto x hay que hallar el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \log_a \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]. \tag{1.4}$$

Consideremos el límite de la expresión entre corchetes para $\Delta x \to 0$. Se reduce al límite

$$\lim_{h \to 0} [(1 + h)^{1/h}] \quad \left(\text{para } h = \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Este límite desempeña también un papel importante en el análisis matemático. Frecuentemente se denomina *segundo límite notable*. Se demuestra que este límite existe. Según Euler *), el número igual a este límite se denota por la letra e **), o sea,

$$\lim_{h\to 0}\left[(1+h)^{\frac{1}{h}}\right]=e. \qquad (1.5)$$

Volvamos a calcular el límite (1.4). En la fórmula (1.4), el argumento del logaritmo es la magnitud $\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right]$ que, de acuerdo con (1.5), tiende a e para $\Delta x\to 0$. Si la función logarítmica es continua, entonces $\log_a\left(\left[1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right]$ tiende a $\log_a e$ para $\Delta x\to 0$. De este modo, para hallar el límite (1.4), hay que demostrar la continuidad de la función logarítmica y utilizar el límite (1.5). Suponiendo que lo hemos hecho, obtenemos que el límite (1.4) es igual a $\frac{1}{2}\log_a e$. Resulta que

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e$$

No vamos a calcular aquí las derivadas de otras funciones elementales: $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, $y=\operatorname{arcsen} x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$, $y=a^x$ e $y=x^\alpha$, donde α es un número cualquiera. Calculando las derivadas de estas funciones no surgen ningunas dificultades nuevas, excepto las mencionadas anteriormente. A saber, para calcular las derivadas de todas las funciones elementales más simples se necesita solamente su continuidad y dos límites notables.

Aduzcamos la tabla de las derivadas de las funciones elementales más simples:

1°. $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$, donde α es un número cualquiera.

2°. $(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e$, en particular, si $a=e$, entonces $(\log_e x)'=\frac{1}{x}$.

3°. $(a^x)'=a^x\log_e a$, en particular, si $a=e$, entonces $(e^x)'=e^x$.

---

*) Leonhard Euler (1707—1783), de origen suizo, gran matemático, miembro de la Academia de Ciencias de San Petersburgo, pasó la mayor parte de su vida en Rusia.

**) En el § 16 del cap. 8 indicaremos el procedimiento para calcular el número e con cualquier grado de precisión. Ahí mismo se dará el resultado del cálculo del número e utilizando el ordenador con precisión de hasta 590 signos a la derecha de la coma.

4°. $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

5°. $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.

6°. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

7°. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$.

8°. $(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

9°. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

10°. $(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1-x^2}$.

11°. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

3. Para calcular derivadas de amplia clase de funciones hace falta dar también *la regla de diferenciación de una función compuesta* así como *las reglas de diferenciación de la suma, de la diferencia, del producto y del cociente de funciones*, agregándolas a la tabla de derivadas dada anteriormente. Enunciemos la regla de diferenciación de una compuesta $y = f(x)$, donde $x = \varphi(t)$.

Para hallar la derivada $y'(t)$ de una función compuesta $y = f[\varphi(t)]$ respecto al argumento t en un punto dado t hay que: 1) *calcular la derivada $\varphi'(t)$ de la función $x = \varphi(t)$ en el punto t;* 2) *calcular la derivada $f'(x)$ de la función $y = f(x)$ en el punto x, donde $x = \varphi(t)$;* 3) *multiplicar dichas derivadas.* De este modo, la derivada de la función compuesta $y = f[\varphi(t)]$ puede ser hallada por la fórmula $y'(t) = f'(x)\varphi'(t)$. Los razonamientos siguientes explican la regla enunciada. Demos un incremento arbitrario $\Delta t \neq 0$ al argumento t en el punto t. A este incremento le corresponde el incremento $\Delta x = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$ de la función $x = \varphi(t)$. Al incremento obtenido Δx le corresponde el incremento $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ de la función $y = f(x)$ en el punto x. Omitiendo el caso cuando $\Delta x = 0$, consideremos la relación

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\,\frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Debido a que $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi'(t)$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ y de la existencia del primero de estos límites se deduce que para $\Delta t \to 0$ se tiene $\Delta x \to 0$*), entonces $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$ existe y es igual a $f'(x)\varphi'(t)$, o sea, $y'(t) = f'(x)\varphi'(t)$.

---

*) Si el denominador de una fracción que tiene límite tiende a cero, entonces el numerador de esta fracción también tiende a cero.

Ahora aduzcamos las reglas de diferenciación de la suma, de la diferencia, del producto y del cociente (suponiendo que $u(x)$ y $v(x)$ tienen derivadas):

$$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x),$$
$$[u(x)\,v(x)]' = u(x)\,v'(x) + u'(x)\,v(x),$$
$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)}.$$

Por ejemplo, demostremos cómo puede deducirse la segunda de estas fórmulas. Démosle al argumento x un incremento arbitrario $\Delta x \neq 0$ al que corresponde el incremento Δy de la función $y = u(x)\,v(x)$

$$\Delta y = u(x+\Delta x)\,v(x+\Delta x) - u(x)\,v(x) = u(x+\Delta x)\,[v(x+\Delta x) - v(x)] +$$
$$+ v(x)\,[u(x+\Delta x) - u(x)] = u(x+\Delta x)\,\Delta v + v(x)\,\Delta u.$$

De esta manera,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u(x+\Delta x)\,\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x)\,\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Ya que existen los límites $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x)$ y $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x)$ y de la existencia del primero de éstos se deduce que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} u(x+\Delta x) = u(x)$, entonces $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ existe y es igual a $u(x)\,v'(x) + v(x)\,u'(x)$.

Consideremos algunos ejemplos para emplear dichas reglas.

1) Calculemos la derivada de la función $y = cu(x)$, donde c es una constante. Es fácil verificar que la derivada de una constante es igual a cero. Por eso, según la fórmula de diferenciación del producto, obtenemos $[cu(x)]' = cu'(x)$.

2) Calculemos la derivada de la función $y = \operatorname{tg} x$. Como $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, por la fórmula de diferenciación del cociente obtenemos

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - \operatorname{sen} x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

3) Calculemos la derivada de la función que describe oscilaciones armónicas $y = A\cos(\omega t + \delta)$, donde A, ω y δ son constantes. Examinemos esta función como una función compuesta de tipo $y = A\cos x$, donde $x = \omega t + \delta$. Según la regla de diferenciación de una función compuesta, obtenemos

$$y'(t) = (A\cos x)'\,(\omega t + \delta)' = -(A \operatorname{sen} x)\,\omega,$$

donde $x = \omega t + \delta$. Por eso,

$$y'(t) = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \delta).$$

4) Calculemos la derivada de la función $y = a^{\operatorname{arctg} t}$. Consideremos esta función como una función compuesta de tipo $y = a^u$

donde $x = \operatorname{arctg} t$. Según la regla de diferenciación de una función compuesta obtenemos

$$y'(t) = (a^x)'(\operatorname{arctg} t)' = (a^x \log_e a)\left(\frac{1}{1+t^2}\right)$$

donde $x = \operatorname{arctg} t$. Por eso,

$$(a^{\operatorname{arctg} t})' = \frac{a^{\operatorname{arctg} t}\log_e a}{1+t^2}.$$

Las reglas de diferenciación enunciadas anteriormente y la tabla de las derivadas son el aparato fundamental de aquella parte del análisis matemático que suele llamarse *cálculo diferencial*. De este modo uno de los problemas importantes del cálculo diferencial es la de-

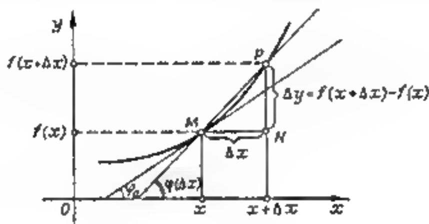


Fig. 1.2

mostración de todas las fórmulas de la tabla de las derivadas y de las reglas de diferenciación de la suma, de la diferencia, del producto, del cociente y de una función compuesta.

4. Aclaremos el sentido geométrico de la derivada. Con este fin consideremos la gráfica de la función $y = f(x)$ *) (fig. 1.2). Sea que en la gráfica de la función el punto M corresponde a un valor fijado del argumento x y el punto P, al valor $x + \Delta x$, donde Δx es un incremento del argumento. La recta MP se denominará *secante*. Mediante $\varphi(\Delta x)$ denotemos el ángulo formado por esta secante y el eje Ox (evidentemente, este ángulo depende de Δx). *Se denomina tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto M la posición límite de la secante MP cuando el punto P tiende al punto M por la gráfica* (o bien, que es lo mismo, cuando $\Delta x \to 0$). De la fig. 1.2 se deduce

$$\operatorname{tg}\varphi(\Delta x) = \frac{PN}{MN} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

*) Se denomina gráfica de la función $y = f(x)$ el lugar geométrico de los puntos del plano para cada uno de los cuales la ordenada es el valor y de esta función, correspondiente a la abscisa x.

Ya que para $\Delta x \to 0$ la secante MP se transforma en la tangente, se tiene

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi (\Delta x) = \operatorname{tg} \varphi_0,$$

donde φ_0 es el ángulo formado por la tangente y el eje Ox. Por otra parte,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi (\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Por consiguiente, $f'(x) = \operatorname{tg} \varphi_0$. La tangente del ángulo entre la recta y el eje Ox se denomina *coeficiente angular* de esta recta. De este modo, *la derivada $f'(x)$ es igual al coeficiente angular de la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto M.*

§ 3. Problema de restablecer la ley de movimiento por la velocidad y la problemática matemática relacionada con éste

Consideremos el siguiente problema físico. Sea que para cualquier momento de tiempo x está dada la velocidad instantánea $f(x)$ del punto material que se mueve por el eje Oy y se sabe la posición de este punto en el momento inicial de tiempo $x = x_0$. Se necesita hallar la ley de movimiento de este punto.

Ya que la velocidad instantánea $f(x)$ es la derivada de la función $y = F(x)$ que determina la ley de movimiento del punto material por el eje Oy, entonces el problema se reduce a la búsqueda, por la función dada $f(x)$, de una función $F(x)$ cuya derivada $F'(x)$ es igual a $f(x)$.

Abstrayéndose del sentido físico concreto de las funciones $f(x)$ y $F(x)$ llegamos a los conceptos matemáticos de *primitiva* y de *integral indefinida*. *Se llama primitiva de la función $f(x)$ tal función $F(x)$ cuya derivada $F'(x)$ es igual a $f(x)$.*

Es obvio que si la función $F(x)$ es primitiva de la función $f(x)$, entonces la función $F(x) + C$, donde C es una constante cualquiera, es también primitiva de la función $f(x)$ (pues la derivada de la constante C es igual a cero).

Se puede demostrar que cualesquiera dos primitivas de una misma función $f(x)$ se diferencian en una constante. De este modo, si la función $F(x)$ es una de las primitivas de la función $f(x)$, entonces *cualquier primitiva* de la función $f(x)$ tiene la forma $F(x) + C$, donde C es una constante.

El conjunto de todas las primitivas de una misma función $f(x)$ se denomina integral indefinida de la función $f(x)$ y se denota por el símbolo $\int f(x)\,dx$.

Por consiguiente, si $F(x)$ es una de las primitivas de la función $f(x)$, entonces

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Volvamos a resolver el problema físico planteado anteriormente. Nos interesa la ley de movimiento del punto que tiene la velocidad instantánea $f(x)$. Se determina por la función $y = F(x) + C$, donde $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$ y C, una constante. Para determinar la constante C empleemos el hecho de que $y = y_0$ en el momento inicial de tiempo $x = x_0$, o sea, $y_0 = F(x_0) + C$, de donde $C = y_0 - F(x_0)$. De esta manera, la ley de movimiento que nos interesa tiene la forma

$$y = F(x) + y_0 - F(x_0).$$

Consideremos algunos ejemplos físicos y matemáticos.

1) Sea que la velocidad del punto material que se mueve por el eje Oy tiene la forma $f(x) = \cos x$. Se requiere hallar la ley de movimiento de este punto si en el momento inicial de tiempo $x = x_0$ el punto ocupa la posición $y = y_0$ en el eje Oy. De la tabla de las derivadas se deduce que una de las primitivas de la función $f(x) = \cos x$ es la función $F(x) = \operatorname{sen} x$. Por consiguiente, la ley buscada de movimiento tiene la forma $y = \operatorname{sen} x + C$.

Observando la condición $y = y_0$ para $x = x_0$ hallamos $C = y_0 - \operatorname{sen} x_0$, o sea, en definitiva obtenemos la ley de movimiento

$$y = \operatorname{sen} x + y_0 - \operatorname{sen} x_0.$$

2) Hallar $\frac{1}{1+x^2}\,dx$. De la tabla de las derivadas se deduce que una de las primitivas de la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es la función $F(x) = \operatorname{arctg} x$. Por consiguiente,

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C.$$

En el párrafo anterior hemos puesto la tabla de las derivadas de las funciones elementales. Teniendo en cuenta que toda fórmula $F'(x) = f(x)$ de esta tabla lleva a la fórmula correspondiente $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, obtenemos la siguiente tabla de las integrales indefinidas:

1°. $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$

2°. $\int \frac{dx}{x} = \log_e |x| + C.$

3°. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log_e a} + C.$

4°. $\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C.$

5°. $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C.$

6°. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7°. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8°. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C.$

9°. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

Esta tabla, a la par con las reglas de integración (que no se dan aquí), es un aparato importante de cálculo de la parte del análisis matemático que suele llamarse *cálculo integral*.

Sin embargo, este aparato resulta insuficiente para calcular muchas integrales indefinidas. Surge el problema de la existencia de la primitiva (y de la integral indefinida) para una función arbitraria $f(x)$, continua en todo punto x. En el párrafo siguiente indicaremos otro enfoque del problema de la integración de una función, que permite resolver este problema.

Ahora señalemos sólo que existen funciones continuas (en todo punto x), por ejemplo, $y = \cos x^2$, cuyas primitivas existen, pero no pueden representarse por un número finito de operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y formación de funciones compuestas de las funciones elementales más simples enumeradas en el p. 2 del § 2.

§ 4. Problemas que surgen al calcular el recorrido del punto

1. Sea que la función $f(x)$ representa la velocidad de movimiento del punto material por el eje Oy. Consideremos, para mayor sencillez, que todos los valores de la función $f(x)$ son no negativos. Se requiere calcular el camino recorrido por el punto material en un intervalo de tiempo de $x = a$ a $x = b$.

Para resolver el problema *) dividamos el intervalo considerado de tiempo en intervalos pequeños limitados por los momentos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Es lógico creer que en todo intervalo de x_{k-1} a x_k la velocidad $f(x)$ cambia poco. Por eso, podemos considerar aproximadamente constante esta velocidad en dicho intervalo y hacerla igual, por ejemplo, a $f(x_k)$. En este caso, el camino recorrido por el punto material en tiempo $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

*) A continuación explicaremos la relación entre este problema y el considerado en el párrafo anterior.

es aproximadamente igual a $f(x_k)\,\Delta x_k$ y el camino S_a^b recorrido por el punto en el tiempo de a a b es aproximadamente igual a

$$S_a^b \approx f(x_1)\,\Delta x_1 + f(x_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(x_n)\,\Delta x_n. \qquad (1.6)$$

Es lógico esperar que, disminuyendo todos los intervalos de tiempo Δx_k, obtendremos el valor cada vez más preciso del recorrido S_a^b. El valor exacto del recorrido S_a^b lo obtendremos si en la suma (1.6) pasamos al límite cuando todos los Δx_k tienden a cero (es natural que al mismo tiempo el número de los sumandos en la suma (1.6) aumentará ilimitadamente). Empleando el símbolo del límite podemos escribir la siguiente fórmula:

$$S_c^b = \lim_{\Delta x_k \to 0} [f(x_1)\,\Delta x_1 + f(x_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(x_n)\,\Delta x_n]. \qquad (1.7)$$

Además, hay que aclarar qué comprendemos como límite de dicha suma. Por lo tanto, otra vez nos convencemos de la necesidad de profundizar y desarrollar el concepto de límite. En las matemáticas el límite (1.7) se denomina *integral definida* de la función $f(x)$ entre los límites a y b y se denota por el símbolo

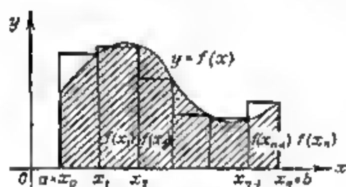


Fig. 1.3

$$S_a^b = \int_a^b f(x)\,dx.$$

La suma (1.6) es la suma de las áreas de los rectángulos cuyas bases son los segmentos Δx_k y las alturas, $f(x_k)$. En otras palabras, esta suma es igual al área de la figura escalonada representada en la fig. 1.3 (en el dibujo esta figura escalonada está contorneada con línea gruesa). Es lógico esperar que al tender las longitudes de todos los segmentos Δx_k a cero el área de dicha figura escalonada tenderá al área de la figura curvilínea rayada en el dibujo y situada por debajo de la gráfica de la función $y = f(x)$ en el segmento de a a b. Esta figura curvilínea se llama con frecuencia *trapecio curvilíneo.* De este modo, la integral definida es igual al área del trapecio curvilíneo mencionado.

Naturalmente, dichos razonamientos son de carácter preliminar. En particular, hace falta aclarar el propio concepto de área del trapecio curvilíneo y, en general, el de área de una figura plana.

2. Nos damos cuenta de que el concepto de integral definida está estrechamente ligado con dos problemas importantes: el problema físico en el cual se calcula el recorrido del punto y el geométrico en el cual se calcula el área de una figura plana. Debido a eso es

muy importante el problema de los procedimientos que se emplean para calcular la integral definida.

Denotemos mediante $F(x)$ la integral definida de la función $f(x)$ entre los límites a y x, es decir, pongamos

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx.$$

Desde el punto de vista geométrico esta integral es igual al área del trapecio curvilíneo que está situado por debajo de la gráfica de la función $y = f(x)$ en el segmento de a a x. En la fig. 1.4 este trapecio está contorneado con línea gruesa.

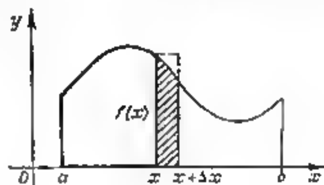


Fig. 1.4

Empleando los razonamientos geométricos evidentes demostremos que la función introducida $F(x)$ es una de las primitivas de la función $f(x)$, o sea, podemos convencernos de que $F'(x) = f(x)$. Sea Δx un incremento del argumento x. Es obvio que la diferencia $F(x + \Delta x) - F(x)$ es igual al área del trapecio curvilíneo «estrecho» rayado en la fig. 1.4. Para un Δx pequeño el área de este trapecio se diferencia poco del área $f(x)\,\Delta x$ del rectángulo con la base Δx y la altura $f(x)$. De aquí se deduce que para un Δx pequeño la relación

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \tag{1.8}$$

se diferencia poco de la altura $f(x)$ del rectángulo mencionado anteriormente. Ya que para $\Delta x \to 0$ el límite de la fracción (1.8) es igual a la derivada $F'(x)$, entonces $F'(x) = f(x)$. Así pues, la función $F(x)$ es una de las primitivas de la función $f(x)$. Por consiguiente, *cualquier* primitiva $\Phi(x)$ de la función $f(x)$ tiene la forma

$$\Phi(x)=F(x)+C=\int_a^x f(x)\,dx+C. \tag{1.9}$$

Naturalmente, los razonamientos aducidos y la fórmula (1.9) que se deduce de ellos no son válidos, hablando en general, para toda función $f(x)$. Es fácil convencerse de que la fórmula (1.9) es válida para cualquier función continua $f(x)$ en todo punto x. Por lo tanto, la obtención de la fórmula (1.9) resuelve el problema de la existencia de la primitiva (y la integral indefinida) para cualquier función $f(x)$ continua en todo punto x.

Ahora, empleando la misma fórmula (1.9), establecemos la relación entre la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ y cualquier primitiva $\Phi(x)$ de la función $f(x)$. Poniendo sucesivamente en la fórmula (1.9) $x = a$ y $x = b$ y teniendo en cuenta la igualdad

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0,$$

que proviene de razonamientos geométricos, obtenemos

$$\Phi(a) = \int_a^a f(x)\,dx + C = C, \quad \Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx + C.$$

Por eso

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{1.10}$$

La fórmula (1.10) es una de las fórmulas fundamentales del cálculo integral y se denomina *fórmula de Newton—Leibniz* *). Esta fórmula reduce el problema de calcular la integral definida al problema de calcular una primitiva (o la integral indefinida). La demostración de la fórmula de Newton—Leibniz es uno de los problemas importantes del análisis matemático. Para calcular aproximadamente integrales definidas existe una serie de métodos, el más sencillo de los cuales se basa en la sustitución de esta integral por la suma (1.6). Estos métodos y la relación (1.9) dan la posibilidad de calcular aproximadamente también las integrales indefinidas y, en particular, permiten calcular la primitiva de cualquier función $f(x)$, continua en todo punto x.

Como ejemplo calculemos el área S_1 comprendida entre la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$ en el segmento de 0 a π y el eje Ox (fig. 1.5) **. En virtud de lo dicho anteriormente $S_1 = \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$. Ya que una de las primitivas de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es la función $\Phi(x) = -\cos x$, entonces por la fórmula (1.10) obtenemos

$$S_1 = \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 2.$$

*) Gottfried Wilhelm Leibniz, filósofo y matemático alemán (1646—1716).
**) El cálculo de esta área por los medios de la matemática elemental lleva a grandes dificultades.

Ahora, calculemos el área S_2 de la figura separada de la parábola $y = x^2$ por la recta que pasa por dos puntos M_1 (a, a^2) y M_2 (b, b^2) de esta parábola (fig. 1.6) *). El área buscada S_2 es igual a la dife-

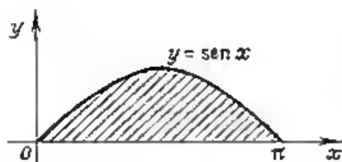


Fig. 1.5

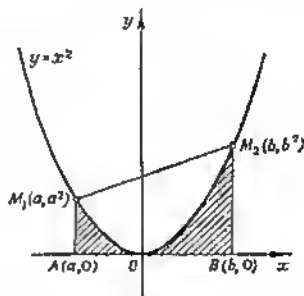


Fig. 1.6

rencia de las áreas del trapecio rectilíneo AM_1M_2B y el trapecio curvilíneo rayado en el dibujo, o sea,

$$S_2 = \frac{(b^2+a^2)(b-a)}{2} - \int_a^b x^2\,dx = \frac{(b^2+a^2)(b-a)}{2} - \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{(b-a)^3}{6}.$$

§ 5. Observaciones finales

Los cálculos diferencial e integral forman la base del análisis matemático el cual es uno de los logros más grandes de la inteligencia humana. Al introducir los conceptos de magnitud variable y de función en las matemáticas los científicos pudieron pasar de resoluciones de problemas de física y geometría separados a la creación de métodos generales de su solución. El desarrollo de los cálculos diferencial e integral influyó considerablemente en el progreso general de la ciencia y la técnica.

El ulterior progreso de la ciencia y la técnica está estrechamente relacionado con la matematización de nuestras representaciones de la naturaleza, con el desarrollo de nuevas ramas de las matemáticas. Se puede decir con seguridad que la matematización de nuestras ideas, la formulación cuantitativa exacta de las leyes, y el amplio uso de los métodos de cálculo y ordenadores constituyen la base de las ciencias naturales contemporáneas.

*) Arquímedes (s. III a. n. e.), gran científico de la Grecia antigua, resolvió este problema por los medios de la matemática elemental.

La introducción de los métodos de cálculo y ordenadores eliminan, como regla, los problemas de laboriosidad y complejidad de cálculos *). Pero surge una serie de problemas matemáticos entre los cuales figuran desarrollos de los algoritmos **) que sirven para componer programas de ordenadores, la elaboración de ciertos problemas de las teorías de control y de procesos óptimos, la lógica matemática y la cibernética teórica.

Nuestro objetivo consistirá en formalizar el aparato del análisis matemático. Examineoios también algunas aplicaciones de este aparato para elaborar algoritmos numéricos.

La consideración preliminar de dichos problemas realizada anteriormente plantea las siguientes tareas inmediatas:

1) precisión de los conceptos de número real, magnitud variable y función;

2) definición y desarrollo del concepto de límite de la función y del concepto de su continuidad ligado con ésto;

3) argumentación de las fórmulas y reglas del cálculo diferencial e integral;

4) creación de la teoría de la integral definida representada como límite de sumas de tipo especial y desarrollo de los métodos de cálculo de la integral definida;

5) aclaración de algunos conceptos geométricos (área de una figura plana, longitud de un arco, etc.).

---

*) Los ordenadores modernos realizan, en unos minutos, los cálculos que el hombre tendría que hacer toda su vida.

**) El algoritmo es un sistema de cálculos que se hacen según reglas estrictamente determinadas que llevan a la solución de la tarea planteada, después de realizar cierto número de pasos (operaciones).

Capítulo 2

TEORÍA DE LOS NÚMEROS REALES

De las matemáticas elementales el lector conoce la idea de números reales y de que son necesarios para medir, por ejemplo, segmentos o intervalos de tiempo. Para profundizar nuestros conocimientos de los conceptos matemáticos más importantes —los de magnitud variable, función y límite— es preciso desarrollar la teoría de los números reales.

Por ejemplo, consideremos una magnitud variable física, el tiempo. Para comparar entre sí diferentes intervalos de tiempo tenemos que saber comparar entre sí números reales. En otras palabras, debemos establecer una regla que permita determinar cuál de los dos números reales dados es mayor. En la práctica las mediciones sucesivas de tiempo llevan a la necesidad de definir las operaciones de adición y multiplicación de los números reales y determinar las propiedades de dichas operaciones. Indiquemos también que la aclaración de las propiedades fundamentales de los números reales es necesaria para argumentar que las reglas del álgebra elemental pueden emplearse para estos números.

§ 1. Números reales

1. Propiedades de los números racionales. Recordemos que se denomina número racional el número que puede representarse en forma de la relación de dos números enteros *). De las matemáticas elementales se sabe cómo se definen las operaciones de adición y multiplicación de los números racionales, la regla de comparación de estos números y sus propiedades más sencillas. Aquí enumeremos las propiedades fundamentales de los números racionales que se deducen de las propiedades correspondientes de los números enteros.

Tres reglas desempeñan el papel fundamental entre dichas propiedades: *regla de comparación* y *reglas de formación de suma y de producto*:

I. *Cualesquiera dos números racionales a y b están ligados por uno, y sólo uno, de los tres símbolos $>$, $<$ o $=$, con tal que si $a > b$, entonces $b < a$. En otras palabras, existe la regla que permite determinar*

*) Un mismo número racional puede representarse en forma de la relación de diferentes números enteros. Por ejemplo, $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}= \ldots$

qué símbolo de los tres mencionados liga dos números racionales dados. Esta regla se denomina *regla de comparación* *).

II. *Existe una regla por medio de la cual a cualesquiera dos números racionales a y b se les pone en correspondencia un determinado número racional c llamado su suma y denotado por el símbolo* $c = a + b$ **).

La operación para hallar la suma se denomina *adición*.

III. *Existe una regla por medio de la cual a cualesquiera dos números racionales a y b se les pone en correspondencia un determinado número racional c llamado su producto y denotado por el símbolo* $c = ab$ ***).

La operación para hallar el producto se denomina *multiplicación*.

La regla de comparación de los números racionales posee la siguiente propiedad:

1° *de* $a > b$ *y* $b > c$ *se deduce que* $a > c$ (propiedad de transitividad del signo $>$); *de* $a = b$ *y* $b = c$ *se deduce que* $a = c$ (propiedad de transitividad del signo $=$).

La regla de adición de los números racionales posee las siguientes propiedades:

2° $a + b = b + a$ (propiedad conmutativa);

3° $(a + b) + c = a + (b + c)$ (propiedad asociativa);

4° *existe el número racional* 0 *tal que* $a + 0 = a$ *para todo número racional* a (papel exclusivo del cero);

5° *para todo número racional* a *existe un número opuesto* a' *tal que* $a + a' = 0$.

La regla de multiplicación de números racionales posee las siguientes propiedades:

6° $ab = ba$ (propiedad conmutativa);

7° $(ab)c = a(bc)$ (propiedad asociativa);

8° *existe un número racional* **1** *tal que* $a \cdot 1 = a$ *para todo número racional* a (papel especial de la unidad);

9° *para todo número racional* a, *diferente de cero, existe un número inverso* a' *tal que* $aa' = 1$.

Las reglas de adición y multiplicación están ligadas por la siguiente propiedad:

---

*) La regla de comparación de los números racionales se enuncia del modo siguiente: dos números racionales no negativos $a = \frac{m_1}{n_1}$ y $b = \frac{m_2}{n_2}$ están ligados por el mismo signo que liga dos números enteros m_1n_2 y m_2n_1; dos números racionales no positivos a y b están ligados por el mimso signo que liga dos números no negativos $|b|$ y $|a|$; si a es número racional no negativo y b, negativo, entonces $a > b$.

**) La regla para formar la suma de números racionales $a = \frac{m_1}{n_1}$ y $b = \frac{m_2}{n_2}$ se define por la fórmula $\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1n_2 + m_2n_1}{n_1n_2}$.

***) La regla para formar el producto de los números racionales se define por la fórmula $\frac{m_1}{n_1} \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1m_2}{n_1n_2}$.

10° $(a + b)c = ac + bc$ (propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma).

Dos propiedades siguientes ligan el signo $>$ con los signos de adición y multiplicación:

11° *de* $a > b$ *se deduce que* $a + c > b + c$;

12° *de* $a > b$ *y* $c > 0$ *se deduce que* $ac > bc$.

La última propiedad desempeña un papel especial:

13° *cualquiera que sea un número racional* a *se puede repetir el número* 1 *como sumando tantas veces que la suma obtenida supere a* a *).

Las trece propiedades enumeradas suelen llamarse *propiedades fundamentales* de los números racionales puesto que todas las demás propiedades algebraicas de estos números que se refieren a las operaciones aritméticas y la combinación de igualdades y desigualdades pueden obtenerse como corolario de las propiedades mencionadas.

Así, por ejemplo, de estas propiedades se deduce la propiedad frecuentemente utilizada ulteriormente que permite sumar término a término desigualdades del mismo signo:

si $a > b$ y $c > d$, entonces $a + c > b + d$.

En efecto, de las desigualdades $a > b$ y $c > d$ y de las propiedades 11° y 2° se deduce que $a + c > b + c$ y $b + c > b + d$ y de las últimas desigualdades y de la propiedad 1° se deduce que $a + c > b + d$.

2. Medición de los segmentos del eje numérico. De las matemáticas elementales se sabe que dos segmentos pueden ser conmensurables (si la razón de sus longitudes es un número racional) o inconmensurables (la diagonal y el lado de un cuadrado es un ejemplo de segmentos inconmensurables).

Es conveniente que el eje numérico sea considerado inmediatamente. Se denominará *eje numérico* una recta que tiene un punto determinado O (origen de referencia), el segmento de escala OE (su longitud se toma igual a la unidad) y la dirección positiva (normalmente, de O a E).

Naturalmente, se plantea el problema de si es posible poner en correspondencia a todo punto M del eje numérico un número que sea equivalente a la longitud del segmento OM. Consideremos como positivo este número si M y E se sitúan por un lado de O y negativo, en el caso contrario.

Ante todo señalemos que *a todo número racional le corresponde un punto determinado en el eje numérico.* En efecto, de las matemáticas elementales sabemos cómo se construye el segmento cuya longitud es una n-ésima parte del segmento de escala OE (n es cualquier número positivo entero). Así pues, podemos construir el segmento AB cuya longitud se relaciona a la del segmento de escala OE como $\frac{m}{n}$, donde m y n son cualesquiera números positivos enteros. Tomando

*) Esta propiedad suele llamarse *axioma de Arquímedes*.

en consideración que el punto E está situado a la derecha de O (fig. 2.1) y trazando el segmento AB a la derecha (a la izquierda) del punto O, obtenemos el punto M_1 (M_2) que corresponde al número racional $+\frac{m}{n}\left(-\frac{m}{n}\right)$.

Además, la existencia de segmentos inconmensurables permite afirmar que *no todos los puntos del eje numérico corresponden a los números racionales.*

Es lógico que se hace necesario extender el campo de los números racionales e incorporar a la consideración tales puntos que corres-

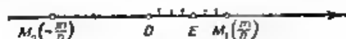


Fig. 2.1

pondan a todos los puntos del eje numérico y permitan medir cualquier segmento con ayuda del segmento de escala OE.

Describiremos un proceso especial de medición del segmento OM del eje numérico y demostraremos que este proceso *permite poner en correspondencia a todo punto M de este eje una fracción decimal infinita bien determinada.*



Fig. 2.2

Sea M cualquier punto del eje numérico. Para que sea preciso, supongamos que M (igual que E) está situado a la derecha de O (fig. 2.2).

Mediremos el segmento OM empleando el segmento de escala OE. Ante todo determinemos cuántas veces el segmento OE cabe en el segmento OM. Pueden presentarse dos casos:

1) El segmento OE cabe en el segmento OM un número entero de veces a_0 con un resto NM menor que OE (véase la fig. 2.2). En este caso, el número entero a_0 es el resultado aproximado de medición *por defecto* con exactitud de hasta la unidad.

2) El segmento OE cabe en el segmento OM un número entero de veces $a_0 + 1$ sin resto. En este caso, a_0 es también el resultado aproximado de medición *por defecto* con exactitud de hasta la unidad, puesto que el segmento OE cabe, en el segmento OM, a_0 veces con resto NM igual a OE *).

*) En la práctica en el segundo caso el proceso de medición se considera terminado y la longitud del segmento OM se toma igual a $a_0 + 1$. Sin embargo, es más cómodo (para la uniformidad) realizar las mediciones estrictamente por defecto para obtener también el resto NM y tener la posibilidad de continuar el proceso de medición en este caso.

Ahora determinemos cuántas veces 1/10 parte del segmento de escala OE cabe en el resto NM. Otra vez pueden presentarse dos casos:

1) 1/10 parte del segmento OE cabe en el segmento NM un número entero de veces a_1 con un resto PM, menor que 1/10 parte del segmento OE (véase la fig. 2.2). En este caso, el número racional a_0, a_1 es el resultado de medición por defecto con exactitud de hasta 1/10.

2) 1/10 parte del segmento OE cabe en el segmento NM un número entero de veces $a_1 + a$ sin resto. En este caso, el número racional a_0, a_1 es también el resultado de medición *por defecto* con exactitud de hasta 1/10, puesto que 1/10 parte de OE cabe en el segmento NM a_1 veces con el resto PM igual a 1/10 parte de OE *).

Continuando infinitamente dichos razonamientos, tendremos un conjunto infinito de números racionales:

$$a_0;\ a_0,\ a_1;\ \ldots\ ;\ a_0,\ a_1a_2\ \ldots\ a_n;\ \ldots, \tag{2.1}$$

cada uno de los cuales es el resultado de medición del segmento OM *por defecto* con el grado correspondiente de exactitud. Además, se puede obtener cada uno de los números mencionados (2.1) quitando cierta parte de *la fracción decimal infinita*

$$a_0,\ a_1a_2\ \ldots\ a_n\ \ldots \tag{2.2}$$

Podemos también emplear los razonamientos anteriores para el caso cuando el punto M yace a la izquierda del punto O, sólo en este caso todos los números (2.1) y la fracción decimal infinita (2.2) tendrán signo negativo.

De este modo, hemos demostrado que *utilizando dicho proceso de medición del segmento OM a todo punto M del eje numérico se le puede poner en correspondencia una fracción decimal infinita bien determinada.*

El proceso para medir un segmento arbitrario OM del eje numérico empleando el segmento de escala nos conduce lógicamente a la consideración de los *números representables en forma de fracciones decimales infinitas.* Al mismo tiempo, toda fracción decimal infinita (2.2) se caracteriza completamente por el conjunto infinito (2.1) de números racionales que aproximan esta fracción. Dicho proceso de medición del segmento OM puede transformarse, naturalmente, de tal modo que conduzca a la consideración de fracciones binarias infinitas o de cualquier otro sistema de numeración.

Notemos que, para introducir números, en los ordenadores modernos se usa con la mayor frecuencia el sistema de numeración binaria y, a veces, ternaria. Esto se explica por lo que las válvulas y los elementos semiconductores que integran la estructura de ordenadores tienen dos y, a veces, tres estados estables (por ejemplo: si

*) Véase la nota en la pág. 32.

la válvula está cerrada y la corriente no pasa, es un estado estable; si la válvula está abierta y la corriente pasa, es otro estado estable; tendremos el tercer estado estable si distinguimos la dirección de la corriente).

Debido a eso surge la necesidad de elaborar algoritmos para transformar los números del sistema de numeración decimal a la binaria y viceversa. El lector puede familiarizarse con los ejemplos de estos algoritmos en el Complemento 1 del presente capítulo.

3. Números reales y regla de su comparación. Consideremos el *conjunto de todas las fracciones decimales infinitas posibles. Los números representables por estas fracciones se denominan reales* *).

Un número real dado se denominará *positivo* (*negativo*) si es representable en forma de una fracción decimal infinita positiva (negativa).

El conjunto de los números reales contiene, naturalmente, todos los números racionales puesto que todos ellos son representables en forma de fracciones decimales infinitas. La representación del número racional dado en forma de una fracción decimal infinita puede obtenerse empleando, por ejemplo, los siguientes razonamientos. A todo número racional le corresponde un punto determinado M del eje numérico; valiéndose del método dado en el párrafo 2, se pone en correspondencia a este punto una fracción decimal infinita. Así, al número racional 1/2 se le pone en correspondencia la fracción decimal infinita 0,49999..., al número racional 4/3, la fracción decimal infinita 1,333...

Los números reales que no son racionales suelen llamarse *irracionales*.

Nuestra tarea es transferir sucesivamente tres reglas y todas las *propiedades fundamentales* de los números racionales enumerados en el p. 1 para el caso de números reales arbitrarios. Por tanto, para los números reales serán argumentadas todas las reglas del álgebra elemental que se refieren a las operaciones aritméticas y la combinación de igualdades y desigualdades.

En este punto determinemos la regla de comparación de los números reales. Antes de enunciar esta regla nos ponemos de acuerdo sobre la forma determinada de notación de los números racionales que *son representables en forma de una fracción decimal finita*. Observemos que dichos números racionales admiten la *doble notación* en forma de fracciones decimales infinitas. Por ejemplo, el número $\frac{1}{2} = 0{,}5$ puede escribirse: 1) en la forma $\frac{1}{2} = 0{,}4999\ldots$; 2) en la forma $\frac{1}{2} = 0{,}5000\ldots$

---

*) Como ya hemos señalado en la nota de la pág. 12, al concepto de número se refiere a los *conceptos iniciales*.

En general, el número racional $a_0, a_1a_2 \ldots a_n$, donde $a_n \neq 0$, puede escribirse: 1) en la forma $a_0, a_1a_2 \ldots a_{n-1} (a_n - 1) 999 \ldots$; 2) en la forma $a_0, a_1a_2 \ldots a_n 000 \ldots$

La primera de dos notaciones mencionadas puede obtenerse por el método descrito en el p. 2, la segunda, por la transformación formal de la fracción decimal finita dada en la infinita añadiendo ceros.

Al comparar los números reales, nos ponemos de acuerdo emplear, para los números racionales mencionados, sólo el primero de dos tipos de notación en forma de una fracción decimal infinita.

En otras palabras, para comparar los números reales no utilizaremos fracciones decimales infinitas cuyas cifras, a partir de cierto signo decimal, serán todas iguales a cero (excepto, sin duda, la fracción 0,000...) *).

Ahora pasamos a formular las *reglas de comparación* de los números reales.

Consideremos dos números reales arbitrarios a y b. Sea que estos números son representables por las siguientes fracciones decimales infinitas:

$$a = \pm a_0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots, \tag{2.3}$$

$$b = \pm b_0, b_1b_2 \ldots b_n \ldots \tag{2.4}$$

(donde se pone uno de los dos signos + ó —).

Dos números reales (2.3) y (2.4) se denominan *iguales* si tienen signos iguales y si son válidas las igualdades $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots \ldots, a_n = b_n, \ldots$

Sean dados dos números reales *no iguales* a y b. Establecemos la regla que permite concluir qué signo, $<$ ó $>$, liga estos dos números:

1) Sea que a y b son *ambos no negativos* y se representan del modo siguiente: $a = a_0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots$; $b = b_0, b_1b_2 \ldots b_n \ldots$

Ya que los números a y b no son iguales, se infringe al menos una de las igualdades $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n, \ldots$ Denotemos por k el menor de los números n, para los cuales se infringe la igualdad $a_n = b_n$ **). Entonces, consideremos $a > b$, si $a_k > b_k$, y $a < b$, si $a_k < b_k$.

2) Si *uno* de los números a y b es *no negativo* y *otro* es *negativo*, entonces consideremos lógicamente que el número no negativo es mayor que el negativo.

3) Nos queda por considerar el caso cuando *ambos números* a y b son *negativos*. *Nos ponemos de acuerdo llamar módulo de un número*

*) Este acuerdo corresponde completamente al proceso de medición del segmento, descrito en el p. 2, puesto que dicho proceso no puede llevar a una fracción decimal infinita cuyas cifras decimales, a partir de cierto signo, serán todos iguales a cero.

**) En otras palabras, consideramos que $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1}$ pero $a_k \neq b_k$.

real a al número real no negativo, denotado por el símbolo $|a|$ e igual a la fracción decimal que representa el número a y se toma con el signo $+$.

Si *ambos a y b son negativos*, consideremos $a > b$, si $|b| > |a|$, y $a < b$, si $|a| > |b|$ *).

Vamos a convencernos de que la regla de comparación de los números reales posee la propiedad 1° enunciada en el p. 1 para los números racionales. A saber, demostremos que si a, b y c son números reales arbitrarios y *si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$* (propiedad de transitividad del signo $>$) **). Para demostrar esta propiedad consideremos tres casos posibles:

1) Sea primeramente $c \geqslant 0$. Entonces, de la regla de comparación de los números reales se desprende evidentemente que $b > 0$ y $a > 0$. Sean $a = a_0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots$; $b = b_0, b_1b_2 \ldots b_n \ldots$; $c = c_0, c_1c_2 \ldots c_n \ldots$ Denotemos por k el menor de los números n para los cuales se infringe la igualdad $a_n = b_n$ (es decir, supongamos que $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $\ldots$, $a_{k-1} = b_{k-1}$, $a_k > b_k$) y por p, el menor de los números n para los cuales se infringe la igualdad $b_n = c_n$ (es decir, supongamos que $b_0 = c_0$, $b_1 = c_1$, $\ldots$, $b_{p-1} = c_{p-1}$, $b_p > c_p$). Entonces, si mediante m denotamos el menor de los dos números k y p, serán válidas las relaciones $a_0 = c_0$, $a_1 = c_1$, $\ldots$, $a_{m-1} = c_{m-1}$, $a_m > c_m$, lo que significa que $a > c$.

2) Sean $c < 0$, $a \geqslant 0$. Entonces la desigualdad $a > c$ será válida para cualquier b.

3) Nos queda por considerar el caso cuando los tres números a, b y c *son negativos*. Ya que $a > b$ y $b > c$, entonces $|b| > |a|$ y $|c| > |b|$. Pero en virtud del caso de los tres números positivos ya considerado anteriormente, $|c| > |a|$, lo que significa que $a > c$. La propiedad de transitividad del signo $>$ queda completamente demostrada.

4. Aproximación de un número real por medio de los números racionales. Aquí mostremos que todo número real puede aproxi-

*) Es fácil darse cuenta de que si la regla de comparación de los números reales se emplea para dos números racionales lleva al mismo resultado que la regla de comparación de los números racionales mencionada en la nota de la pág.

En efecto, basta considerar sólo el caso de dos números racionales *no negativos a y b*. Sea $a > b$ *según la regla de comparación de los números racionales* y sea que $a = a_0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots$; $b = b_0, b_1b_2 \ldots b_n \ldots$ Supongamos que al número racional a corresponde un punto M_1 del eje numérico y al número racional b, el punto M_2. Está claro que el punto M_1 yace a la derecha del punto M_2. Al mismo tiempo, del punto 2 se deduce que el *número entero* $a_0a_1 \ldots a_k$ ($b_0b_1 \ldots b_k$) muestra cuántas veces la $1/10^k$ parte del segmento de escala OE cabe en el segmento OM_1 (OM_2) con el extremo derecho eliminado. Como el segmento OM_1 es mayor que el segmento OM_2, existe un número k tal que $a_0a_1 \ldots a_{k-1} = b_0b_1 \ldots b_{k-1}$, mientras $a_0a_1 \ldots a_k > b_0b_1 \ldots b_k$. Esto significa que $a > b$ *según la regla de comparación de los números reales.*

**) La propiedad de transitividad del signo de igualdad $=$ (que afirma que de $a = b$ y $b = c$ se desprende que $a = c$) se deduce directamente de la regla de comparación de los números reales.

marse con cualquier grado de precisión utilizando números racionales. Examinemos un número real arbitrario a. Para que sea preciso, lo consideraremos no negativo y lo representaremos en forma de la fracción decimal infinita $a = a_0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots$

Terminando esta fracción en la n-ésima cifra después de la coma y omitiendo las demás, obtenemos el número racional $a_0, a_1a_2 \ldots a_n$. Aumentando este número en $\frac{1}{10^n}$, obtenemos otro número racional $a_0, a_1a_2 \ldots a_n + \frac{1}{10^n}$. Empleando la regla de comparación de los números reales es fácil determinar que para cualquier número n son válidas las desigualdades

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_n \leqslant a \leqslant a_0, a_1a_2 \ldots a_n + \frac{1}{10^n} \qquad (2.5)$$

Las desigualdades (2.5) significan que *el número real a se encuentra entre dos números racionales cuya diferencia es igual a $\frac{1}{10^n}$. Además, el número n puede ser cualquiera.*

Demostremos que para cualquier número racional positivo ε, *tomado anticipadamente*, a partir de cierto número n es válida la desigualdad $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$. En efecto, cualquiera que sea el número racional $\varepsilon > 0$, existe solamente un número finito de números naturales que no superan al número $1/\varepsilon$. Por eso, solamente para un número finito de los números n es válida la desigualdad $10^n \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$ ó $\frac{1}{10^n} \geqslant \varepsilon$. Para todos los demás números n es válida la desigualdad inversa $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$ lo que se requería demostrar.

De este modo, llegamos a la siguiente *afirmación*: *para cualquier número real a y cualquier número racional positivo ε, tomado anticipadamente, existen dos números racionales α_1 y α_2 tales que $\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$ con tal que $\alpha_2 - \alpha_1 < \varepsilon$.*

Las desigualdades (2.5) permiten afirmar que el número racional $a_0, a_1a_2a_3 \ldots a_n$ aproxima el número real a con exactitud de hasta $\frac{1}{10^n}$. En la práctica siempre se usa el valor aproximado de un número real, es decir, éste se sustituye por el número racional de grado requerido de precisión.

5. Conjuntos de números reales acotados superior o inferiormente. En este punto consideremos un conjunto arbitrario de números reales que contiene por lo menos un número *). Lo denotaremos por el símbolo $\{x\}$. Los números que integran el conjunto $\{x\}$ se denominarán *elementos* de este conjunto **).

*) Este conjunto suele llamarse *no vacío*.

**) Notemos que los conceptos de conjunto y de su elemento se refieren a los conceptos iniciales (véase la nota en la pág. 12).

Definición 1. *Un conjunto de números reales* $\{x\}$ *se denomina superiormente (inferiormente) acotado si existe un número real* M *(número* m*) tal que todo elemento* x *del conjunto* $\{x\}$ *satisfase la desigualdad*

$$x \leqslant M \quad (x \geqslant m).$$

En este caso el número M (número m) se denomina *cota superior* (*cota inferior*) del conjunto $\{x\}$.

Todo conjunto superiormente acotado $\{x\}$ tiene un número infinito de cotes superiores. En efecto, si un número real M es cota superior del conjunto $\{x\}$, entonces todo número real M^*, mayor quo M, es también cota superior del conjunto $\{x\}$. Se puede hacer la observación análoge en cuanto a cotas inferiores de un conjunto inferiormente acotado $\{x\}$.

Así, por ejemplo, un conjunto de todos los números reales negativos es inferiormente acotado. Como la cota superior M de este conjunto se puede tomar cualquier número real no negativo. El conjunto de todos los números positivos enteros 1, 2, 3, . . . es inferiormente ecotado. Como le cota inferior de este conjunto puede tomarse cualquier número real m que satisface la desigualdad $m \leqslant 1$.

Como es lógico, surge el problema de la existencia do la *mínima* entre las cotas superiores de un conjunto superiormente acotado y la *máxima* entre las cotes inferiores de un conjunto inferiormeute acotado.

Definición 2. *La mínima entre todas las cotas superiores de un conjunto superiormente acotado* $\{x\}$ *se denomina* ***cota superior exacta*** *de este conjunto y se denota por el símbolo* $\bar{x} = \sup\{x\}$.

La máxima entre todas las cotas inferiores de un conjunto inferiormente acotado $\{x\}$ *se denomina* ***cota inferior exacta*** *de este conjunto y se denota por el símbolo* $\underline{x} = \text{in}\ \{x\}$.

La definición 2 puede enunciarse también de otro modo, a saber:

El número $\bar{x}$ *(número* $\underline{x}$*) se denomina cota superior exacta (inferior exacta) de un conjunto superiormente (inferiormente) acotado* $\{x\}$ *si se cumplen dos condiciones siguientes:* 1) *todo elemento* x *del conjunto* $\{x\}$ *satisface la desigualdad* $x \leqslant \bar{x}$ $(x \geqslant \underline{x})$, 2) *cualquiera que sea un número real* x' *menor que* $\bar{x}$ *(mayor que* $\underline{x}$*), existe al menos un elemento* x *del conjunto* $\{x\}$ *que satisface la desigualdad* $x > x'$ $(x < x')$.

En esta definición la condición 1) significa que el número $\bar{x}$ (número $\underline{x}$) es *una* de las cotas superiores (inferiores) y la condición 2) dice que esta cota os *mínima* (*máxima*) y no puede ser disminuida (aumenteda).

Es obvio que el conjunto de todos los números reales negativos tiene cota superior exacta, o sea el número cero, con tal que este número *no pertenezca al conjunto dado.* Es también obvio que el con-

junto de todos los números positivos enteros 1, 2, 3, . . . tiene cota inferior exacta $\underline{x} = 1$ que *pertenece al conjunto dado* (es decir, es *elemento mínimo* de este conjunto). De este modo, la cota superior exacta (inferior exacta) de un conjunto puede tanto pertenecer como no pertenecer a este conjunto.

En todo conjunto superiormente (inferiormente) acotado, la existencia de cota superior exacta (inferior exacta) no es evidente y se necesita demostrarla.

Demostremos el siguiente teorema *fundamental*.

Teorema 2.1. *Si un conjunto de números reales contiene al menos un elemento y está acotado superiormente (inferiormente), entonces existe un número real $\bar{x}$ (número $\underline{x}$) que es la cota superior exacta (inferior exacta) de este conjunto.*

DEMOSTRACIÓN. Nos limitaremos a demostrar solamente la existencia de la cota superior exacta para cualquier conjunto superiormente acotado, puesto que la existencia de la cota inferior exacta para un conjunto inferiormente acotado se demuestra de modo completamente análogo.

Pues, sea el conjunto $\{x\}$ superiormente acotado, es decir existe un número real M tal que todo elemento x del conjunto $\{x\}$ satisface la desigualdad

$$x \leqslant M. \qquad (2.6)$$

Pueden haber dos casos: 1°. Entre los elementos del conjunto $\{x\}$ existe *al menos un* número real no negativo. 2°. Todos los elementos del conjunto son números reales negativos. Consideraremos estos casos por separado.

1°. Consideremos solamente los números reales no negativos que integran el conjunto $\{x\}$. Representemos cada uno de estos números en forma de una fracción decimal infinita y consideremos partes enteras de estas fracciones decimales. En virtud de (2.6) todas las partes enteras no superan al número M y, por eso, existe la *máxima* entre las partes enteras que se denotará por $\bar{x}_0$. Entre los números no negativos del conjunto $\{x\}$ conservemos los que tienen la parte entera igual a $\bar{x}_0$ y eliminemos todos los demás números. En los números conservados consideremos las primeras cifras decimales después de la coma. El máximo entre estos números se denotará por $\bar{x}_1$. Entre los números no negativos del conjunto $\{x\}$ conservemos los que tienen la parte entera igual a $\bar{x}_0$ y la primera cifra decimal es igual a $\bar{x}_1$, y eliminemos todos los demás números. En los números conservados consideremos solamente las segundas cifras decimales después de la coma. La máxima entre estas cifras se denotará por $\bar{x}_2$. Continuando los razonamientos análogos, determinamos sucesivamente cifras decimales del número real $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \bar{x}_0, \bar{x}_1\bar{x}_2 \ . \ . \ . \ \bar{x}_n \ . \ . \ .$$

Demostremos que este mismo número $\bar{x}$ es la cota superior exacta del conjunto $\{x\}$. Para hacerlo es suficiente demostrar *dos afirmaciones*: 1) que todo elemento x del conjunto $\{x\}$ satisface la desigualdad $x \leqslant \bar{x}$, 2) que, cualquiera que sea el número real x' menor que $\bar{x}$, existe al menos un elemento x del conjunto $\{x\}$ que satisface la desigualdad $x > x'$.

Primeramente demostremos la *afirmación* 1). Como $\bar{x}$ es no negativo, todo número *negativo* x del conjunto $\{x\}$ satisface, sin duda, la desigualdad $x \leqslant \bar{x}$. Sea $x = x_0, x_1 \ldots x_n \ldots$ cualquier número no negativo que integra el conjunto $\{x\}$.

Supongamos que este número x no satisface la desigualdad $x \leqslant \bar{x}$. Entonces $x > \bar{x}$ y, según la regla de comparación, existe un número k tal que $x_0 = \bar{x}_0, \ldots, x_{k-1} = \bar{x}_{k-1}, x_k > \bar{x}_k$. Pero las últimas relaciones contradicen el hecho de que en calidad de $\bar{x}_k$ se toma la *máxima* entre las cifras decimales x_k de los elementos x que tienen la parte entera y las primeras $(k-1)$ cifras después de la coma iguales respectivamente a $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{k-1}$.

Ahora demostremos la *afirmación* 2). Sea $x' = x'_0, x'_1x'_2 \ldots \ldots x'_n \ldots$ un número real arbitrario *) menor que $\bar{x}$. Entonces, en virtud de la regla de comparación de los números reales existe un número n tal que

$$x'_0 = \bar{x}_0, \ x'_1 = \bar{x}_1, \ \ldots, \ x'_{n-1} = \bar{x}_{n-1}, \ x'_n < \bar{x}_n. \qquad (2.7)$$

Por otra parte, el número $\bar{x}$ fue hecho de tal modo que entre los elementos del conjunto $\{x\}$ existe un número $x = x_0, x_1x_2 \ldots x_n \ldots$ cuya parte entera y las n primeras cifras decimales son iguales a las del número $\bar{x}$, o sea,

$$\bar{x}_0 = x_0, \ \bar{x}_1 = x_1, \ \ldots, \ \bar{x}_{n-1} = x_{n-1}, \ \bar{x}_n = x_n. \qquad (2.8)$$

Comparando (2.7) y (2.8), en virtud de la regla de comparación obtenemos que $x' < x$. *La afirmación* 2) *queda demostrada*. De este modo, para el caso 1° la existencia de la cota superior exacta queda también demostrada.

2°. Se demuestra análogamente la existencia de la cota superior exacta para el segundo caso cuando *todos los elementos del conjunto* $\{x\}$ *son números reales negativos*. En este caso, todos los elementos del conjunto $\{x\}$ se representarán en forma de fracciones decimales

---

*) Sin limitar la generalidad, este número x' consideramos no negativo, puesto que si fuera negativo, la desigualdad $x > x'$ satisfaría el elemento no negativo x del conjunto $\{x\}$.

infinitas negativas. Mediante $\bar{x}_0$ denotemos la *mínima* entre las partes enteras de estas fracciones; mediante $\bar{x}_1$, la *mínima* de las primeras cifras decimales de las fracciones que tienen la parte entera igual a $\bar{x}_0$; mediante $\bar{x}_2$ denotemos la *mínima* entre segundas cifras decimales de las fracciones que tienen la parte entera igual a $\bar{x}_0$ y la primera cifra decimal, igual a $\bar{x}_1$; . . . De esta manera, determinamos el número real negativo

$$\bar{x} = -\bar{x}_0, \bar{x}_1\bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n \ldots$$

De manera completamente análoga al caso 1° se demuestra que el número $\bar{x}$ es la cota superior exacta del conjunto $\{x\}$ (o sea, satisface dos afirmaciones enunciadas al considerar el caso 1°). El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. Al demostrar el teorema 2.1 en el caso 2° todas las cifras decimales del número $\bar{x} = -\bar{x}_0, \bar{x}_1\bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n \ldots$, a partir de cierto signo, pueden resultar iguales a cero, o sea, éste puede tener la forma $\bar{x} = -\bar{x}_0, \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{k-1}\bar{x}_k 000 \ldots$, donde $\bar{x}_k \neq 0$.

En este caso, la demostración dada anteriormente queda en vigor, pero según el acuerdo aceptado en el p. 3, al comparar el número $\bar{x}$ con los elementos del conjunto, $\bar{x}$ debe escribirse en la forma

$$\bar{x} = -\bar{x}_0, \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{k-1}(\bar{x}_k - 1)\, 999.$$

§ 2. Operaciones aritméticas con los números reales. Propiedades fundamentales de los números reales

1. Definición de la suma de los números reales. Uno de los problemas más importantes de la teoría de los números reales es *el problema de definir las operaciones de adición y multiplicación de estos números y de las propiedades de estas operaciones.* Ante todo examinemos la operación de adición de los números reales.

Es bien sabido cómo se suman dos números reales en la práctica. Para sumar dos números reales a y b, éstos se sustituyen, con grado exigido de exactitud, por números racionales, y la suma de los números racionales mencionados se toma como valor aproximado de la suma de dos números reales dados. Además, no importa cómo, por defecto o por exceso, dichos números racionales aproximan los números reales dados a y b. Dicho procedimiento práctico de adición de los números reales, de hecho, supone que cuanto más exacto es el grado con que los números racionales α y β aproximan (de cualquier modo) los números reales a y b, respectivamente, tanto más exacta es la suma $\alpha + \beta$ que aproxima el número real que debe ser la suma de los números reales a y b.

El deseo de justificar dicho procedimiento práctico de adición de los números reales lleva lógicamente a la siguiente definición de la suma de dos números reales.

Sean α_1 y α_2 cualesquiera números racionales entre los cuales se encuentra un número real a (o sea, $\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$) y sean β_1 y β_2 cualesquiera números racionales entre los cuales se encuentra un número real b (o sea, $\beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2$). Entonces se denomina suma de los números reales a y b un número real x quo se encuentra entre todos los números racionales $(\alpha_1 + \beta_1)$ y $(\alpha_2 + \beta\ )$ *).

En otras palabras, se denomina ***suma*** *de números reales a y b un número real x tal que para cualesquiera números racionales α_1, α_2, β_1 y β_2 que satisfacen las desigualdades*

$$\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2, \quad \beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2, \tag{2.9}$$

verifica las siguientes desigualdades:

$$\alpha_1 + \beta_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2 + \beta_2. \tag{2.10}$$

La existencia de tal número real x que, además, es único, no provoca dudas (la demostración correspondiente se da a continuación en glosilla). No es difícil convencerse de que este número x es la cota superior exacta del conjunto $\{\alpha_1 + \beta_1\}$ de las sumas de todos los números racionales α_1 y β_1 que satisfacen las desigualdades izquierdas (2.9) **).

1°. En primer lugar, vamos a convencernos de que dicha cota superior exacta existe. En efecto, fijemos números racionales arbitrarios α_2 y β_2 que satisfacen las desigualdades derechas do (2.9) y consideremos todos los números racionales posibles α_1 y β_1 que satisfacen las desigualdades izquierdas de (2.9). Empleando la propiedad de transitividad del signo $>$ demostrada en el p. 3 del § 1, concluimos que $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$, $\beta_1 \leqslant \beta_2$ y de estas desigualdades se desprende que $\alpha_1 + \beta_1 \leqslant \alpha_2 + \beta_2$ (véase la parte final del p. 1 del § 1). De este modo, el conjunto de todos los números racionales $\{\alpha_1 + \beta_1\}$ *es acotado superiormente* y el número $\alpha_2 + \beta_2$ *es una de las cotas superiores* de este conjunto. Según el teorema 2.1, el conjunto $\{\alpha_1 + \beta_1\}$ tiene la cota superior exacta que se donotará por x. Queda por convencerse de que el número x es suma de los números reales a y b, o sea, satisface las desigualdades (2.10). En efecto, según la definición de la cota superior exacta es válida la desigualdad izquierda de (2.10), mientras que la validez de la desigualdad derecha de (2.10) se desprenda de que $\alpha_2 + \beta_2$ es *una de las cotas superiores y x, la cota superior exacta del conjunto* $\{\alpha_1 + \beta_1\}$.

2°. Ahora demostremos que existe *sólo un número* real x que satisface las desigualdades (2.10). Para eso nos basamos en el siguiente lema (para la comodidad, hacemos la demostración de esta lema al final del párrafo):

Lema. *Si para dos números reales dados x_1 y x_2 y para cualquier número racional positivo tomado anticipadamente ε se encontrarán dos números racionales γ_1 y γ_2 tales que $\gamma_1 \leqslant x_1 \leqslant \gamma_2$, $\gamma_1 \leqslant x_2 \leqslant \gamma_2$ y $\gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon$, entonces los números x_1 y x_2 son iguales.*

---

*) Observemos que en el curso elemental la suma de dos números reales se define de manera análoga.

**) Se puede convencerse análogamente de que este número es la cota inferior exacta del conjunto $\{\alpha_2 + \beta_2\}$ de las sumas de todos los números racionales α_2 y β_2 que satisfacen las desigualdades derechas de (2.9).

Supongamos que existen dos números reales x_1 y x_2 que satisfacen las desigualdades (2.10) (para cualesquiera números racionales α_1, α_2, β_1 y β_2 que satisfacen las desigualdades (2.9)). Tomemos cualquier número racional ε. Según la afirmación demostrada en el p. 4 del § 1, para el número racional $\varepsilon/2$ y el número real a se encontrarán números racionales α_1 y α_2 tales que $\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$ con tal que $\alpha_2 - \alpha_1 < (\varepsilon/2)$. Análogamente, para el número real b y para el número racional $\varepsilon/2$ se encontrarán números racionales β_1 y β_2 tales que $\beta_1 \leqslant \leqslant b \leqslant \beta_2$ con tal que $\beta_2 - \beta_1 < (\varepsilon/2)$.

De este modo, ambos números reales x_1 y x_2 estarán comprendidos entre dos números racionales $(\alpha_1 + \beta_1)$ y $(\alpha_2 + \beta_2)$ cuya diferencia (por módulo) es igual a

$$(\alpha_2 + \beta_2) - (\alpha_1 + \beta_1) = (\alpha_2 - \alpha_1) + (\beta_2 - \beta_1) < \varepsilon.$$

Como ε es cualquier número racional positivo tomado anticipadamente, $x_1 = x_2$ debido al lema enunciado anteriormente.

3°. Por fin, demostremos que para dos números *racionales* la definición de la suma de números reales, enunciada por nosotros, y la definición de la suma de números racionales, conocida del curso elemental, *llevan a un mismo resultado*. En efecto, si a y b son dos números racionales que satisfacen las desigualdades $\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$ y $\beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2$, y $(a + b)$ es su suma obtenida empleando la definición conocida del curso elemental, entonces es obvio que

$$(\alpha_1 + \beta_1) \leqslant a + b \leqslant (\alpha_2 + \beta_2) \qquad (2.11)$$

con tal que, según la afirmación que acabamos de demostrar, el número racional $(a + b)$ es el único número real que satisface las desigualdades (2.11).

4°. Antes de demostrar el lema enunciado anteriormente fundamentemos la siguiente afirmación auxiliar.

Cualesquiera que sean dos números reales a y b tales que $b < a$, existe un número racional α comprendido entre ellos, es decir, tal que $b < \alpha < a$ (y, por consiguiente, existe un conjunto infinito de diferentes números racionales comprendidos entre a y b).

Es suficiente considerar el caso cuando los dos números a y b son *no negativos* puesto que el caso cuando a y b son ambos *no positivos* se reduce al dicho caso pasando a módulos, mientras el caso cuando *un número es positivo* y *otro, negativo*, es trivial (en calidad de α se puede tomar el cero).

Pues, sea que $b \geqslant 0$; $b < a$; $a = a_0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots$; $b = b_0, b_1b_2 \ldots b_n \ldots$ Sea k el mínimo entre los números n para los cuales se infringe la igualdad $a_n = b_n$, es decir, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $\ldots$, $a_{k-1} = b_{k-1}$, $a_k > b_k$.

En virtud del acuerdo aceptado en el p. 3 del § 1 se puede considerar que *todos los a_n, siendo $n > k$, no pueden ser iguales a cero*. Sea p el *mínimo* entre los números n que superan a k y para los cuales $a_n > 0$, es decir,

$$a = a_0, a_1 \ldots a_k 00 \ldots 0 a_p \ldots$$

Entonces, de la regla de comparación de los números reales se deduce directamente que el número racional $\alpha = a_0, a_1 \ldots a_k 00 \ldots 0 (a_p - 1) 999 \ldots$ satisface las desigualdades $b < \alpha < a$. La afirmación auxiliar queda demostrada.

Refiriéndose a la demostración del lema, supongamos que $x_1 \neq x_2$. Sea que, para la precisión, $x_1 < x_2$. Entonces, en virtud de la afirmación auxiliar existen dos números racionales α_1 y α_2 tales que

$$x_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < x_2. \qquad (2.12)$$

Sean ahora γ_1 y γ_2 cualesquiera números racionales que satisfacen las desigualdades

$$\gamma_1 \leqslant x_1 \leqslant \gamma_2, \quad \gamma_1 \leqslant x_2 \leqslant \gamma_2. \qquad (2.13)$$

Comparando (2.12) y (2.13) y utilizando la propiedad de transitividad del signo $>$ obtenemos $\gamma_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \gamma_2$. Pero, entonces $\gamma_2 - \gamma_1 > \gamma_2 - \gamma_1$, lo que

contradice el hecho de que se puede hacer la diferencia $\gamma_2 - \gamma_1$ menor que cualquier número racional positivo tomado anticipadamente ε. El lema queda demostrado.

2. Definición del producto de los números reales. Ya que los problemas que surgen en la definición del producto de los números reales coinciden, en general, con los problemas examinados para definir la suma de los números reales, nos limitamos solamente a formular brevemente los resultados.

Primeramente definimos el producto de dos números *positivos* a y b. Mediante α_1, α_2, β_1 y β_2 denotemos cualesquiera números racionales que satisfacen las desigualdades $\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$, $\beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2$.

Se denominará producto de los números reales *positivos* a y b un número real x que satisface las desigualdades $\alpha_1\beta_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2\beta_2$.

Igualmente como para la suma se demuestra que este número x existe y, además, es único. Es fácil convencerse de que este número x es la cota superior exacta del conjunto $\{\alpha_1\beta_1\}$ de los productos de todos los números racionales α_1 y β_1 que satisfacen las desigualdades $0 < \alpha_1 \leqslant a$, $0 < \beta_1 \leqslant b$.

El producto de los números reales de cualquier signo se determina por la regla siguiente:

1) se considera que $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$;

2) se considera que $ab = \begin{cases} |a|\cdot|b| & \text{si } a \text{ y } b \text{ tienen signos iguales} \\ -|a|\cdot|b| & \text{si } a \text{ y } b \text{ tienen signos diferentes.} \end{cases}$

Para concluir, señalemos que igualmente como para la suma se puede demostrar que empleando para dos números racionales ora la definición del producto de los números reales ora la definición del producto de los números racionales conocida de las matemáticas elementales llegamos al mismo resultado.

3. Propiedades de los números reales. Vamos a convencernos de que para los números reales arbitrarios son válidas todas las *propiedades fundamentales* enumeradas en el p. 1 del § 1 para los números racionales. La validez de la propiedad 1° para los números reales ya está fundamentada anteriormente. De este modo, hace falta aclarar sólo la validez de las propiedades 2°—13° para los números reales.

Es fácil convencerse de que, para los números reales, son válidas las propiedades 2°—5° y 11° relacionadas con el concepto de suma. La validez de las propiedades 2°—5° se desprende directamente de la definición de la suma de los números reales y de la validez de dichas propiedades para los números racionales.

Vamos a demostrar la propiedad 11°, es decir, demostremos que *si a, b y c son cualesquiera tres números reales y $a > b$, entonces $a + c > b + c$.*

Como $a > b$, en virtud de la afirmación auxiliar argumentada al demostrar el lema (véase la parte final del p. 1 del párrafo presente), existen números racionales α_1 y β_2 tales que $a > \alpha_1 > \beta_2 > b$. Para el número real c y para el número

racional positivo $\varepsilon = \alpha_1 - \beta_2$ se encontrarán números racionales γ_1 y γ_2 tales que $\gamma_1 \leqslant c \leqslant \gamma_2$ y, además, $\gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon = \alpha_1 - \beta_2$ (véase la afirmación demostrada en el p. 4 del § 1).

Luego, sean α_2 y β_1 cualesquiera números racionales que satisfacen las desigualdades $\alpha_2 \geqslant a$, $b \geqslant \beta_1$. Entonces, por la definición de la suma de los números reales

$$\alpha_2 + \gamma_2 \geqslant a + c \geqslant \alpha_1 + \gamma_1, \quad \beta_2 + \gamma_2 \geqslant b + c \geqslant \beta_1 + \gamma_1.$$

Para demostrar que $a + c > b + c$, debido a la transitividad del signo $>$, basta demostrar que $\alpha_1 + \gamma_1 > \beta_2 + \gamma_2$, pero esto se desprende directamente de la desigualdad $\gamma_2 - \gamma_1 < \alpha_1 - \beta_2$.

Observemos que la *sustracción* de los números reales puede considerarse como la operación inversa a la adición lo que se fundamenta completamente a base de las propiedades 2°—5°. Denominaremos *diferencia de los números reales a y b un número real c tal que $c + b = a$.*

Vamos a convencernos de que esta diferencia es el número $c = a + b'$ siendo b' el número opuesto a b.

En efecto, empleando las propiedades 2°—5°, se puede escribir

$$c + b = (a + b') + b = a + (b' + b) = a + 0 = a.$$

Ahora vamos a convencernos de que existe *sólo un* número real que es diferencia de dos números reales dados. Supongamos que además del número dado anteriormente $c = a + b'$ existe otro número d tal que $d + b = a$. Entonces, por un lado, $(d + b) + b' = a + b' = c$, y por otro lado, $(d + b) + b' = d + (b + b') = d + 0 = d$, es decir, $c = d$.

Empleando la definición de la diferencia y la propiedad 5° se deduce que el número a', opuesto a a, es igual a la diferencia entre el número 0 y el número a. Este número suele escribirse en la forma $-a$.

No es difícil transferir para el caso de los números reales las propiedades 6°, 7°, 8°, 9°, 10° y 12° relacionadas con el concepto de producto. Refiriéndose a la propiedad 9°, indiquemos que si a es un número real positivo y α_1, α_2 son cualesquiera números racionales que satisfacen las desigualdades $0 < \alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$, entonces el número a', inverso de a, se define como el único número real que satisface las desigualdades $\frac{1}{\alpha_2} \leqslant a' \leqslant \frac{1}{\alpha_1}$ *).

Las propiedades 6°—9° permiten deducir que para cualesquiera dos números reales a y b ($b \neq 0$) existe sólo un número c que satisface la condición $cb = a$. Este número c se denomina *cociente* de los números a y b.

---

*) En calidad del número a' se puede tomar la cota superior exacta del conjunto de todos los números racionales $\left\{\frac{1}{\alpha_2}\right\}$.

De la definición del cociente y la propiedad 9° se desprende que el número a', inverso de a, es igual al cociente de los números 1 y a que se denota por $1/a$.

En fin, observemos que para los números reales se transfiere también la última propiedad 13 de los números racionales, a saber: *cualquiera que sea el número real a, se puede repetir el número 1, como sumando, tantas veces que la suma obtenida superará a a* *). Demostremos esta propiedad. Si $a < 0$, la demostración no es necesaria puesto que $1 > a$. Sea $a \geqslant 0$ y $a = a_0, a_1 \ldots a_n \ldots$ En virtud de que la definición de la suma de los números reales coincide, en cuanto a la suma de los números racionales, con la definición de la suma de los números racionales, al repetir el número 1, como sumando, n veces, obtenemos el número entero n. De este modo, es suficiente demostrar que para el número a existe un número entero n tal que $n > a$ lo que es obvio ya que basta tomar $n = a_0 + 2$.

De este modo, *para los números reales se transfieren todas las propiedades fundamentales enunciadas para los números racionales en el p. 1 del párrafo presente. Por consiguiente, para los números reales quedan en vigor todas las reglas del álgebra que se refieren a las operaciones aritméticas y a la combinación de igualdades y desigualdades.*

Con esto acabamos de exponer elementos de la teoría de los números reales necesarios para formar el curso del análisis matemático. La exposición más detallada de la teoría de los números reales aparece en el apéndice del tomo 2.

Para concluir observemos que hemos construido la teoría de los números reales empleando su representación en forma de fracciones decimales infinitas.

Está bien claro que podríamos emplear también fracciones infinitas de cualquier otra base (no es necesario que sea decimal). Respecto a eso los sistemas de numeración de diferentes bases son equivalentes unos a otros. No obstante, en algunos problemas de cálculos aproximados, en particular, para redondear números hasta el orden dado, los sistemas de numeración de bases pares e impares se portan de manera diferente (véase al respecto el Complemento 2 del capítulo presente).

4. Algunas relaciones frecuentemente utilizadas. Para cualesquiera números reales a y b demostremos la validez de dos relaciones siguientes:

$$|ab| = |a| \cdot |b|, \tag{2.14}$$

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|. \tag{2.15}$$

Estas relaciones se enuncian de la manera siguiente: 1) *el módulo del producto de dos números es igual al producto de los módulos de estos números,* 2) *el módulo de la suma de dos números no supera a la suma de los módulos de estos números.*

*) Observemos que esta propiedad se denomina *axioma de Arquímedes.*

La relación (2.14) se desprende directamente de la definición del producto de dos números reales. Demostremos la relación (2.15). Basándose en la definición del módulo y la regla de comparación para cualesquiera números reales a y b se hacen válidas las desigualdades

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|, \quad -|b| \leqslant b \leqslant |b|.$$

En virtud de las propiedades fundamentales se puede sumar término a término las desigualdades de signos iguales (lo que está demostrado en la parte final del p. 1 del § 1). Por eso

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|.$$

Si $a + b > 0$, empleemos la parte derecha de las últimas desigualdades y, si $a + b \leqslant 0$, la izquierda, lo que permite obtener la desigualdad (2.15).

OBSERVACIÓN. Señalemos otras dos desigualdades frecuentemente utilizadas:

$$|a - b| \geqslant |a| - |b| \tag{2.16}$$

y

$$|a - b| \geqslant ||a| - |b||. \tag{2.17}$$

Para obtener la desigualdad (2.16) es suficiente tomar en consideración que $a = (a - b) + b$ y, basándose en (2.15), escribir la desigualdad $|a| \leqslant \leqslant |a - b| + |b|$. La desigualdad (2.17) es corolario de la desigualdad (2.16) y de la desigualdad $|b - a| \geqslant |b| - |a|$ la cual se obtiene de (2.16) si los números a y b cambian de lugares y signos.

§ 3. Algunos conjuntos concretos de números reales

A continuación vamos a examinar diferentes conjuntos de números reales. Un conjunto arbitrario de números reales se denotará por el símbolo $\{x\}$ y los números que integran este conjunto se denominarán *elementos* o *puntos* del conjunto. Diremos que el *punto* x_1 *del conjunto* $\{x\}$ *es distinto del punto* x_2 *de este conjunto si los números reales* x_1 *y* x_2 *no son iguales uno a otro.* Si, además, es válida la desigualdad $x_1 > x_2$ ($x_1 < x_2$), diremos que el *punto* x_1 *yace a la derecha* (*a la izquierda*) *del punto* x_2.

Consideremos algunos conjuntos de números reales que se usan mucho.

1°. El conjunto de números reales x que satisfacen las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$, si $a < b$, se denominará *segmento* y se denotará por el símbolo $[a, b]$. Además, los números a y b se llamarán *puntos de frontera* o *extremos* del segmento $[a, b]$ y todo número x que satisface las desigualdades $a < x < b$ se llamará *punto interior* del segmento $[a, b]$.

2°. El conjunto de todos los números reales x que satisfacen las desigualdades $a \leqslant x < b$ {o bien $a < x \leqslant b$} se denominará *semisegmento* y se denotará por el símbolo $[a, b)$ {o bien $(a, b]$}.

3°. El conjunto de todos los números reales x que satisfacen las desigualdades $a < x < b$ se denominará *intervalo* y se denotará por el símbolo (a, b).

4°. Todo intervalo que contiene el punto c se denominará *entorno del punto c*.

5°. El intervalo $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, donde $\varepsilon > 0$, se denominará *ε-entorno del punto c*.

6°. El conjunto de todos los números reales se denominará *recta numérica* (*infinita*) y se denotará por el símbolo $(-\infty, +\infty)$.

7°. El conjunto de todos los números reales x que satisfacen la desigualdad $x \geqslant a$ {o bien $x \leqslant b$} se denominará *semirrecta* y se denotará por el símbolo $[a, \infty)$ {o bien $(-\infty, b]$}.

8°. El conjunto de todos los números reales x que satisfacen la desigualdad $x > a$ {o bien $x < b$} se denominará *semirrecta abierta* y se denotará por el símbolo (a, ∞) {o bien $(-\infty, b)$}.

OBSERVACIÓN. Notemos que a veces el segmento se llama *segmento cerrado* y el intervalo, *segmento abierto*.

Un conjunto arbitrario $\{x\}$ se denominará *denso en sí* si en cualquier entorno de todo punto x de este conjunto se encuentra al menos un punto del conjunto distinto de x. Cualquiera de los conjuntos 1°—8° definidos anteriormente puede servir de ejemplo de conjunto denso en sí. Otro ejemplo de dicho conjunto puede ser el de todos los números racionales que forman parte de cualquiera de los conjuntos 1°—8°.

Complemento 1

Conversión de los números del sistema decimal al binario y del sistema binario al decimal

En este complemento vamos a estudiar los algoritmos de conversión de los números del sistema decimal al binario y de la conversión inversa, del sistema binario al decimal *).

1. Conversión de los números del sistema decimal al sistema binario. Para representar un número decimal x_{10} en la red de posiciones del ordenador se usa la llamada forma *normalizada* de notación de este número

$$x_{10} = q_{10} \cdot 10^{p_{10}}. \tag{2.18}$$

En esta forma de notación la magnitud

$$q_{10} = (1 - 2S_q)(\alpha_1 \cdot 10^{-1} + \alpha_2 \cdot 10^{-2} + \ldots + \alpha_8 \cdot 10^{-8}) \tag{2.19}$$

se denomina *mantisa* de este número con tal que $\alpha_1 \geqslant 1$; S_q se toma igual a cero para $q_{10} \geqslant 0$ e igual a la unidad para $q_{10} < 0$**). El exponente de la potencia

$$p_{10} = (1 - 2S_p)(\beta_1 + 10\beta_2) \tag{2.20}$$

---

*) Los algoritmos expuestos a continuación se realizan, en particular, en el ordenador BESM-4.

**) De este modo, en la igualdad (2.19), el factor $(1 - 2S_q)$ caracteriza el signo de la mantisa q_{10}.

se denomina *orden* decimal del número dado con la particularidad de que S_p se toma igual a cero para $p_{10} \geqslant 0$ e igual a la unidad para $p_{10} < 0$ *).

En la fig. 2.3 se indica cómo el número decimal (2.18) — (2.20) se representa en la red de posiciones del ordenador. Para representar cada uno de los números decimales $\beta_1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_9$ se dan cuatro posiciones binarias así que cada uno de los números mencionados puede tomar cualquier valor entero de 0 a 15. Para representar el número β_2 se dan sólo dos posiciones, así que β_2 puede tomar valores 0, 1, 2, 3 **).

El programa estándar convierte el número decimal (2.18) — (2.20) en el número binario correspondiente x_2. Este programa se realiza del modo siguiente. Primeramente se calcula la magnitud γ:

$$\gamma = (1 - 2S_q)(\alpha_1 \cdot 10^8 + \alpha_2 \cdot 10^7 + \ldots + \alpha_9) \cdot 2^{44}.$$

Luego, dicha magnitud γ se multiplica por la magnitud $k = 2^{44} \cdot 10^{-10}$ (en el ordenador la última magnitud se da también en forma normalizada y, además,



Fig. 2.3

normalmente con exceso de dos unidades de la posición de orden bajo de la mantisa).

Obviamente, el producto $k\gamma$ corresponde a la mantisa decimal (2.19). La siguiente operación consiste en multiplicar $k\gamma$ por 10 ó 1/10, lo que depende del signo de p_{10}, (es decir, de S_p) que se realiza tantas veces cuanta es la magnitud $|p_{10}|$. Para terminar el programa, en el resultado obtenido se suele borrar tres posiciones de orden bajo la mantisa.

Dicho programa garantiza: 1) al menos 30 cifras binarias exactas del resultado: 2) la conversión al número binario de cualquier número decimal entero de 0 a 50 000: 3) la conversión del número normalizado decimal al número binario normalizado ***).

Para concluir, notemos que si realizamos dicho programa y en el proceso de multiplicar por 10 al orden binario del número convertido supera a 59, entonces las multiplicaciones sucesivas por 10 cesan incluso si hacen falta conforme a la magnitud $|p_{10}|$.

2. **Conversión de los números del sistema binario de numeración al sistema decimal.** Señalamos el programa estándar que convierte el número binario $x_2 = q_2 \cdot 2^{p_2}$, dado en forma normalizada, en el número decimal correspondiente

*) Así que el factor $(1 - 2S_p)$ caracteriza el signo del orden p_{10} en la igualdad (2.20).

**) En efecto, la construcción del dispositivo teclado no permite representar cada uno de los números $\beta_1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_9$ superior a nueve y el número β_2, superior al uno. Así pues, cada uno de los números $\beta_1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_9$ varía de 0 a 9 y el número β_2 toma valores 0 ó 1.

***) Si el número decimal de partida no fue normalizado (es decir, en (2.19) se infringió la condición $\alpha_1 \geqslant 1$), entonces el resultado de su conversión al sistema binario puede ser no normalizado.

x_{10}, escrito en forma normalizada (2.18) — (2.20). En la red de posiciones del ordenador el número convertido se pone del modo indicado en la fig. 2.3.

El programa se realiza de la manera siguiente. Primeramente el número inicial x_2 se multiplica por 1/10 para que después de multiplicarlo por diez no ocurra la sobrecarga del ordenador. Luego el número obtenido se multiplica por 10 si es superior a la unidad o por 1/10, si no lo es, hasta que el resultado de las multiplicaciones no se encuentre en el intervalo de 1/10 a 1. Obviamente, el número de multiplicaciones realizadas determina $|p_{10}|$. En cuanto al signo de p_{10}, es positivo si el número inicial supera a la unidad y negativo en caso contrario.

Luego es evidente que el número obtenido como resultado de las multiplicaciones será mantisa decimal q_{10}. Las cifras $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_9$ de la mantisa decimal q_{10} se determinan sucesivamente multiplicando por 10 y extrayendo la parte entera

Complemento 2

Errores del redondeo de los números en los sistemas de numeración de bases par e impar

Supongamos que el ordenador funciona con números de t posiciones en un sistema de numeración de base $p \geqslant 2$. Entonces, sin disminuir la generalidad, se puede considerar que todos los números $x^{(t)}$ almacenados en la memoria del ordenador tienen la forma

$$x^{(t)} = a_1 p^{-1} + a_2 p^{-2} + \ldots a_t p^{-t}$$

donde los coeficientes a_i ($i = 1, 2, \ldots, t$) pueden tomar valores $0, 1, \ldots, (p-1)$. Está bien claro que las operaciones, tales como la adición, la multiplicación o la división, realizadas con los números de t posiciones pueden dar, como resultado, números que tienen más de t posiciones. Por eso surge lógicamente la necesidad de redondear los números indicados hasta t posiciones.

Examinemos la operación más simple o sea el redondeo de los números que contienen $t + r$ posiciones (siendo $r > 0$) hasta los números de t posiciones. Cualquiera que sea el procedimiento de redondear el número $x^{(t+r)}$ de $(t + r)$ posiciones, el resultado del redondeo debe ser el número de t posiciones. De aquí se desprende que el error del redondeo del número $x^{(t+r)}$ (denotaremos este error por el símbolo $\varepsilon(x^{(t+r)})$) tiene la forma siguiente:

$$\varepsilon(x^{(t+r)}) = -ip^{-(t+r)} + m(i)\cdot p^{-t}.$$

Aquí i puede tomar valores $0, 1, \ldots, p^r - 1$ según los valores de las r últimas posiciones del número $x^{(t+r)}$, y $m(i)$ es una función de i que toma valores enteros y depende del procedimiento elegido de redondeo.

La característica más importante del error del redondeo es su valor medio Δ que se define como la fracción *)

$$\Delta = \frac{\sum \varepsilon(x^{(t+r)})}{n^{(t+r)}}$$

cuyo numerador es la suma de los errores correspondientes a todos los valores admisibles de los números $x^{(t+r)}$ y el denominador, la cantidad de estos números $x^{(t+r)}$.

---

*) El símbolo $\sum$ significa que se suman los sumandos escritos después de este símbolo. Si dichos sumandos dependen del número i la denotación $\sum_{i=m}^{n}$ quiere decir que hace falta sumar todos los valores de i desde m a n.

Supongamos que todos los números considerados $x^{(t+r)}$ satisfacen las desigualdades $0 \leqslant x^{(t+r)} < 1$. Entonces, es obvio que la cantidad $n^{(t+r)}$ de todos estos $x^{(t+r)}$ será igual a $p^{(t+r)}$ y después de hacer cálculos simples obtenemos que

$$\Delta = \frac{\sum \left[-ip^{-(t+r)} + m(i) \cdot p^{-t} \right]}{p^{t+r}} = p^{-(t+r)} \left\{ \sum_{i=0}^{p^r-1} m(i) - \frac{p^r-1}{2} \right\}.$$

La suma $\sum m(i)$, que está entre llaves, depende del procedimiento de redondeo pero en todo caso será entera. El segundo término que está entre llaves $\frac{p^r-1}{2}$ no será entero para todo p *par*. De este modo, para cualquier base par p el error medio Δ no será igual a cero. Esto significa que, para cualquier procedimiento fijo del redondeo determinado sólo por posiciones eliminadas, el error del redondeo hasta el menor número de posiciones tendrá desplazamiento sistemático en cualquier sistema de numeración de base par. Por otra parte, es fácil comprobar que en cualquier sistema de base impar la regla común «escolar» para redondear lleva a errores «no desplazados».

Capitulo 3

LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Una de las operaciones fundamentales del análisis matemático es la operación del paso al límite. En el análisis dicha operación aparece en varias formas. En este capitulo se examina la forma más simple de la operación del paso al limite que se basa en el concepto de limite de la llamada sucesión numérica. A continuación el concepto de límite de una sucesión numérica nos permitirá definir otras formas de la operación del paso al límite.

§ 1. Sucesiones numéricas

1. Sucesiones numéricas y operaciones con ellas. El lector ya tiene ciertos conocimientos sobre sucesiones numéricas de las matemáticas elementales. Los ejemplos de sucesiones numéricas son: 1) la sucesión de todos los elementos de progresiones aritmética y geométrica; 2) la sucesión de los perímetros de n-ágonos regulares inscritos en una circunferencia dada; 3) la sucesión $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}4$, $x_3 = 1{,}41$ ... de los valores aproximados del número $\sqrt{2}$. Vamos a precisar el concepto de sucesión numérica.

Si a todo número n de la serie natural de los números 1, 2, ..., n, ... *se le pone en correspondencia, según una ley determinada, un número real x_n, entonces el conjunto de los números reales enumerados*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \qquad (3.1)$$

se denominará sucesión numérica o simplemente sucesión.

Los números x_n se denominan *elementos* o *términos* de la sucesión (3.1). En forma abreviada, la sucesión (3.1) se denota por el símbolo $\{x_n\}$. Así, por ejemplo, por el símbolo $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ se denotará la sucesión 1, 1/2, ..., $1/n$, ... y por el símbolo $\{1+(-1)^n\}$, la sucesión 0, 2, 0, 2, ...

Introduzcamos el concepto de operaciones aritméticas con sucesiones numéricas. Sean dadas sucesiones arbitrarias $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n, \ldots$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ Se llama *suma* de estas sucesiones la sucesión $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots$ (o bien $\{x_n + y_n\}$), *diferencia*, la sucesión $x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n -$ $- y_n, \ldots$ (o bien $\{x_n - y_n\}$), *producto*, la sucesión $x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \ldots$

$\ldots, x_n \cdot y_n, \ldots$ (o bien $\{x_n \cdot y_n\}$), y *cociente*, la sucesión $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}, \ldots$ $\left(\text{o bien} \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}\right)$.

OBSERVACIÓN. Al definir el cociente $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ se requiere que *todos los elementos* y_n de la sucesión $\{y_n\}$ sean diferentes de cero. Sin embargo, si en la sucesión $\{y_n\}$ se anula *solamente un número finito de elementos*, entonces el cociente $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ puede ser definido a partir del número después del cual todos los elementos y_n son diferentes de cero.

2. Sucesiones acotadas y no acotadas.

Definición 1. *Una sucesión $\{x_n\}$ se denomina **superiormente (inferiormente) acotada** si existe un número real M (un número m) tal que todo elemento x_n de la sucesión $\{x_n\}$ satisface la desigualdad $x_n \leqslant M$ $(x_n \geqslant m)$* *).

Al mismo tiempo, el número M (el número m) se denomina *cota superior* (*inferior*) de la sucesión $\{x_n\}$ y la desigualdad $x_n \leqslant M$ $(x_n \geqslant m)$ se llama *condición de acotación* superior (inferior) de la sucesión.

Notemos que cualquier sucesión superiormente acotada $\{x_n\}$ tiene un conjunto infinito de cotas superiores. En efecto, si M es su cota superior, cualquier número M^*, mayor que M, es también su cota superior. Observemos que en la condición $x_n \leqslant M$ de acotación superior de la sucesión $\{x_n\}$ se puede tomar como M cualquiera de las cotas superiores. Podemos hacer las mismas observaciones con respecto a las cotas inferiores de una sucesión inferiormente acotada $\{x_n\}$.

Definición 2. *Una sucesión $\{x_n\}$ se denomina acotado por ambos lados o simplemente **acotada** si es acotada tanto superiormente como inferiormente, o sea, si existen números m y M tales que todo elemento x_n de esta sucesión satisface las desigualdades: $m \leqslant x_n \leqslant M$.*

Si la sucesión $\{x_n\}$ es acotada y M y m son sus cotas superior e inferior, entonces todos los elementos x_n de esta sucesión satisfacen la desigualdad

$$|x_n| \leqslant A \tag{3.2}$$

donde A es el máximo de dos números $|M|$ y $|m|$. Recíprocamente, si todos los elementos de la sucesión $\{x_n\}$ satisfacen la desigualdad (3.2) se cumplen también las desigualdades $-A \leqslant x_n \leqslant A$ y, por consiguiente, la sucesión $\{x_n\}$ está acotada. De este modo, la desigualdad (3.2) es otra forma de la condición de acotación de una

---

*) Esta definición es completamente análoga a la definición del conjunto superiormente (inferiormente) acotado de los números reales (véase el p. 5 del § 1 del cap. 2).

sucesión. Precisemos el concepto de sucesión no acotada. *La sucesión* $\{x_n\}$ *se denomina no acotada si para cualquier número A existe un elemento* x_n *de esta sucesión que satisface la desigualdad* $|x_n| > A$. Consideremos algunos ejemplos:

1) La sucesión $-1, -4, -9, \ldots, -n^2, \ldots$ es superiormente acotada y no es inferiormente acotada. La cota superior de esta sucesión es todo número no inferior al -1.

2) La sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ está acotada. En efecto, la cota superior de esta sucesión es cualquer número $M \geqslant 1$ y la cota inferior, cualquier número $m \leqslant 0$.

3. La sucesión $1, 2, 1, 3, \ldots, 1, n, 1, (n+1), \ldots$ es no acotada. En realidad, cualquiera que sea el número positivo A, entre los elementos de esta sucesión (de números pares) existen elementos superiores a A.

3. Sucesiones infinitas e infinitesimales

Definición 1. *Una sucesión* $\{x_n\}$ *se denomina* ***infinita*** *si para cualquier número positivo A *) se puede indicar un número N **) tal que para* $n \geqslant N$ *todos los elementos* x_n *de esta sucesión satisfacen la desigualdad* $|x_n| > A$.

OBSERVACIÓN. Evidentemente, toda sucesión infinita es no acotada puesto que para cualquier $A > 0$ se puede indicar un número N tal que para $n \geqslant N$ *todos los elementos* x_n verifican la desigualdad $|x_n| > A$ y, por consiguiente, para cualquier $A > 0$ existe al menos un elemento x_n tal que $|x_n| > A$. Sin embargo, una sucesión no acotada puede no ser infinita. Por ejemplo, la sucesión no acotada $1, 2, 1, 3, \ldots, 1, n, \ldots$ no es infinita puesto que para $A > 1$ la desigualdad $|x_n| > A$ no tiene lugar para *todos los* x_n con números impares.

Definición 2. *Una sucesión* $\{\alpha_n\}$ ****) se denomina* **infinitesimal** *si para cualquier número positivo* ε *****) se puede indicar un número N *****) tal que para* $n \geqslant N$ todos los elementos α_n de esta sucesión satisfacen la desigualdad $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Consideremos los ejemplos siguientes:

1) Demostremos que, para $|q| > 1$, la sucesión $q, q^2, q^3, \ldots, q, \ldots$ es infinita, y para $|q| < 1$, infinitesimal.

En primer lugar, consideremos el caso cuando $|q| > 1$. Entonces $|q| = 1 + \delta$, siendo $\delta > 0$. Empleando la fórmula de bino-

---

*) Cualquier grande que sea el número que hayamos tomado.

**) Puesto que el número N depende del número A, a veces se escribe $N = N(A)$.

***) Los elementos de las sucesiones infinitesimales se denotarán, como regla, con letras griegas.

****) Cualquier pequeño que sea el número que hayamos tomado.

*****) Puesto que el número N depende del número ε, a veces se escribe $N = N(\varepsilon)$.

mio de Newton, obtenemos $|q|^N = (1+\delta)^N = 1 + \delta N +$ (los términos positivos). De aquí

$$|q|^N > \delta N. \tag{3.3}$$

Fijemos un número arbitrario $A > 0$ y tomemos el número N tan grande que tenga lugar la desigualdad $\delta N > A$ *). De la última desigualdad y de la (3.3) se desprende la desigualdad $|q|^N > A$. Como $|q|^n \geqslant |q|^N$ para $n \geqslant N$ y $|q| > 1$ (en virtud de las propiedades de los números reales), se tiene $|q|^n > A$ para $n \geqslant N$. Por tanto, queda demostrado que para $|q| > 1$ la sucesión considerada es infinita.

El caso de $|q| < 1$ se demuestra de manera análoga. En este caso $\frac{1}{q} = 1 + \delta$ donde $\delta > 0$ (hemos omitido el caso de $q = 0$). Empleando de nuevo la fórmula do binomio de Newton, obtenemos en vez de (3.3) la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{|q|^N} > \delta N, \text{ o bien } |q|^N < \frac{1}{\delta N}. \tag{3.3*}$$

Fijemos arbitrariamente $\varepsilon > 0$ y tomemos el número N partiendo de la condición $\frac{1}{\delta N} < \varepsilon$**). Ya que $|q|^n \leqslant |q|^N$ para $n \geqslant N$ y $|q < 1$, entonces de las desigualdades obtenidas se desprende que $|q|^n < \varepsilon$ para $n \geqslant N$. Por tanto, queda demostrado que, para $|q| < 1$, la sucesión considerada es infinitesimal.

2) Demostremos que la sucesión $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ es infinitesimal. En efecto, si $n \geqslant N$, entonces $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N}$. Por eso, según ε dado basta escoger el número N, partiendo de la condición $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Por ejemplo, se puede tomar $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

4. Propiedades fundamentales de las sucesiones infinitesimales.

Teorema 3.1. La suma de dos sucesiones infinitesimales es sucesión infinitesimal.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ sucesiones infinitesimales. Demostremos que la sucesión $\{\alpha_n + \beta_n\}$ es infinitesimal. Sean ε número positivo arbitrario, N_1 número, partiendo del cual $|\alpha_n| < \varepsilon/2$ y N_2 número, partiendo del cual $|\beta_n| < \varepsilon/2$. (Estos números N_1 y N_2 existen por la definición de la sucesión infinitesimal.) Ya que el módulo de la suma de dos números no supera a la suma de

*) Es suficiente tomar $N = \left[\frac{A}{\delta}\right] + 1$, donde el símbolo $[x]$ significa la parte entera del número x. Por ejemplo, $[5, 138] = 5$, $[-172,9] = -173$.

**) Es suficiente tomar $N = \left[\frac{1}{\delta\varepsilon}\right] + 1$.

sus módulos, es decir, $|\alpha_n + \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n|$ (véase el p. 4 del § 2 del cap. 2), entonces, denotando mediante N el máximo de dos números N_1 y N_2 obtenemos que, partiendo del número N, se cumple la desigualdad $|\alpha_n + \beta_n| < \varepsilon$. Esto significa que la sucesión $\{\alpha_n + \beta_n\}$ es infinitesimal. El teorema queda demostrado.

Teorema 3.2. *La diferencia de dos sucesiones infinitesimales es sucesión infinitesimal.*

Este teorema se demuestra análogamente al anterior, pero en vez de la desigualdad $|\alpha_n + \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n|$ debe tomarse la desigualdad $|\alpha_n - \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n|$.

Corolario. *La suma algebraica de cualquier número finito de sucesiones infinitesimales es sucesión infinitesimal.*

Teorema 3.3. *La sucesión infinitesimal es acotada.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\{\alpha_n\}$ una sucesión infinitesimal y ε un número positivo. Luego sea N un número, partiendo del cual $|\alpha_n| < \varepsilon$. Denotemos mediante A el máximo de N números siguientes: ε, $|\alpha_1|$, $|\alpha_2|$, . . ., $|\alpha_{N-1}|$. Esto puede escribirse así: $A = \max\{\varepsilon, |\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_{N-1}|\}$ *). Obviamente, $|\alpha_n| \leqslant A$ *para cualquier número* n, lo que significa el carácter acotado de la sucesión. El teorema queda demostrado.

Teorema 3.4. *El producto de una sucesión acotada por una sucesión infinitesimal es sucesión infinitesimal.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\{x_n\}$ sucesión acotada y $\{\alpha_n\}$ sucesión infinitesimal. Ya que la sucesión $\{x_n\}$ está acotada, entonces existe un número $A > 0$ tal que todo elemento x_n satisface la desigualdad $|x_n| \leqslant A$. Tomemos un número positivo arbitrario ε. Debido a que la sucesión $\{\alpha_n\}$ es infinitesimal, para el número positivo ε/A se puede indicar un número N tal que, siendo $n \geqslant N$, se cumple la desigualdad $|\alpha_n| < \varepsilon/A$. Entonces, para $n \geqslant N$, $|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < A\frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon$. Por eso la sucesión $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ es infinitesimal. El teorema queda demostrado.

Corolario. *El producto de cualquier número finito de sucesiones infinitesimales es sucesión infinitesimal.*

OBSERVACIÓN. El cociente de dos sucesiones infinitesimales puede ser sucesión de cualquier tipo e incluso no tener sentido. Por ejemplo, si $\alpha_n = 1/n$, $\beta_n = 1/n$, entonces todos los elementos de la sucesión $\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\}$ son iguales a la unidad. Si $\alpha_n = 1/n$, $\beta_n = 1/n^2$, entonces la sucesión $\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\}$ es infinita y, al contrario, si $\alpha_n = 1/n^2$, $\beta_n = 1/n$, entonces la sucesión $\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\}$ es infinitesimal. Si el número infinitamente grande de elementos de la

*) Aquí y a continuación el símbolo $a = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ significa que el número a es igual al máximo entre los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

sucesión $\{\beta_n\}$ son iguales a cero, el cociente $\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\}$ no tiene sentido.

Teorema 3.5. *Si todos los elementos de una sucesión infinitesimal $\{\alpha_n\}$ son iguales a un mismo número c, entonces $c = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $c \neq 0$. Hagamos $\varepsilon = |c|/2$, $\varepsilon > 0$. Partiendo de un número N, correspondiente a ese ε, se cumple la desigualdad $|\alpha_n| < \varepsilon$. Ya que $\alpha_n = c$, $\varepsilon = |c|/2$, la última desigualdad puede escribirse del modo siguiente: $|c| < |c|/2$, de donde $1 < 1/2$. Dicha contradicción muestra que la suposición $c \neq 0$ no puede tener sentido. Resulta $c = 0$. El teorema queda demostrado.

Para concluir hagamos la proposición que establece la relación entre sucesiones infinitas e infinitesimales.

Teorema 3.6. *Si $\{x_n\}$ es sucesión infinita, entonces, partiendo de un número n, está definida la sucesión $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ que es infinitesimal. Si todos los elementos de una sucesión infinitesimal $\{\alpha_n\}$ no son iguales a cero, entonces la sucesión $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ es infinita.*

DEMOSTRACIÓN. Notemos, en primer lugar, que la sucesión infinita tiene solamente un número finito de elementos iguales a cero. En realidad, de la definición de la sucesión infinita se desprende que para un número positivo dado A se puede indicar un número N^* partiendo del cual se cumple la desigualdad $|x_n| > A$. Esto significa que para $n \geqslant N^*$ todos los elementos x_n no son iguales a cero y por eso la sucesión $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ tiene sentido si sus elementos se consideran partiendo del número N^*. Ahora demostremos que $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ es sucesión infinitesimal. Sea ε cualquier número positivo. Para el número $1/\varepsilon$ se puede indicar un número $N \geqslant N^*$ tal que para $n \geqslant N$, los elementos x_n de la sucesión $\{x_n\}$ satisfacen la desigualdad $|x_n| > 1/\varepsilon$. Por eso a partir del número indicado N, se cumplirá la desigualdad $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$. De este modo, queda demostrado que la sucesión $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ es infinitesimal. La segunda parte del teorema se demuestra análogamente.

§ 2. Sucesiones convergentes y sus propiedades fundamentales

1. Concepto de sucesión convergente.

Definición. *Una sucesión $\{x_n\}$ se denomina **convergente** si existe un número a tal que la sucesión $\{x_n - a\}$ es infinitesimal. Además,*

el número a se denomina límite de la sucesión $\{x_n\}$ *).

Evidentemente, la definición de la sucesión convergente puede formularse también del modo siguiente.

Una sucesión $\{x_n\}$ *se denomina convergente si existe un número* a *tal que para cualquier número positivo* ε *se puede indicar un número* N**) *tal que, siendo* $n \geqslant N$, *todos los elementos* x_n *de esta sucesión satisfacen la desigualdad*

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{3.4}$$

Además, el número a se llama límite de la sucesión $\{x_n\}$.

Si la sucesión $\{x_n\}$ converge y el número a es su límite, entonces se denota simbólicamente así ***):

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ o bien } x_n \to a \text{ cuando } n \to \infty.$$

OBSERVACIÓN. 1. La desigualdad (3.4) es equivalente a las desigualdades $-\varepsilon < x_n - a < +\varepsilon$ o bien $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$. Las últimas desigualdades significan que el elemento x_n se encuentra en el ε-entorno del número a (recordemos que se llama ε-entorno del número a el intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$). Por eso la definición de la sucesión convergente puede enunciarse también del modo siguiente:

Una sucesión $\{x_n\}$ *se denomina convergente si existe un número* a *tal que en cualquier* ε*-entorno del número* a *se encuentran todos los elementos de la sucesión* $\{x_n\}$, *partiendo de un número* ****).

La definición de la sucesión convergente comprueba que la diferencia $x_n - a = \alpha_n$ es sucesión infinitesimal. Por consiguiente, todo elemento x_n de una sucesión convergente cuyo límite es el número a puede representarse en la forma

$$x_n = a + \alpha_n, \tag{3.5}$$

donde α_n es elemento de una sucesión infinitesimal.

OBSERVACIÓN. 2. Al examinar la definición del límite de una sucesión es evidente que el número finito de elementos no influye en la convergencia de esta sucesión ni en el valor de su límite.

*) En correspondencia con esta definición, toda sucesión infinitesimal es convergente y tiene como su límite el número cero.

**) Puesto que N depende de ε, a veces se escribe $N = N(\varepsilon)$.

***) Notemos que las sucesiones infinitas se denominan a veces sucesiones convergentes hacia el infinito. Por eso, si la sucesión $\{x_n\}$ es infinita, se escribe simbólicamente así:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Si los elementos de la sucesión infinita tienen, partiendo de un número, un signo determinado, se dice que la sucesión $\{x_n\}$ converge hacia el infinito de signo determinado. Esto se escribe simbólicamente del modo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

****) Que depende, por supuesto, de ε.

Consideremos ejemplos de sucesiones convergentes.

1) La sucesión $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ converge; el límite de esta sucesión es igual a la unidad. En efecto, ya que $\frac{n}{n+1}-1=-\frac{1}{n+1}$ entonces para demostrar es suficiente cerciorarse de que la sucesión $\left\{-\frac{1}{n+1}\right\}$ es infinitesimal. Si $n \geqslant N$, entonces $\left|-\frac{1}{n+1}\right| \leqslant \frac{1}{N+1}$ y, por eso, según el número dado $\varepsilon>0$, es suficiente escoger el número N partiendo de la condición $\frac{1}{N+1}<\varepsilon$ o bien $N>\frac{1}{\varepsilon}-1$. Por ejemplo, se puede poner

$$N=\begin{cases}\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]+1 & \text{si } \varepsilon \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } \varepsilon>1.\end{cases}$$

2) Demostremos que la sucesión $x_1=0{,}3$; $x_2=0{,}33$; ...; $x_n = \underbrace{0{,}333\ldots3}_{n \text{ veces}}$; ... converge y su límite es el número 1/3. Como el número 1/3 es representable por la fracción decimal infinita 0,333 ... se desprenden de la regla de comparación de los números reales (véase el p. 3 del § 1 en el cap. 2) las desigualdades *)

$$\underbrace{0{,}33\ldots3}_{n \text{ veces}} \leqslant \frac{1}{3} \leqslant \underbrace{0{,}33\ldots3}_{n \text{ veces}}+\frac{1}{10^n}.$$

Valiéndose de estas desigualdades obtenemos que $\left|x_n-\frac{1}{3}\right|< <\frac{1}{10^n}$. Ya que siendo $n \geqslant N$, $\frac{1}{10^n} \leqslant \frac{1}{10^N}$, entonces, al escoger por cualquier $\varepsilon>0$ el número N, partiendo de la condición $\frac{1}{10^N}<\varepsilon$ obtenemos $\left|x_n-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$ para $n \geqslant N$.

La posibilidad de escoger el número N que satisface la condición $|q|^N<\varepsilon$ para cualquier $|q|<1$ fue comprobada en el ejemplo 1 del p. 3 del § 1.

1. Propiedades fundamentales de las sucesiones convergentes.
Teorema 3.7. La sucesión convergente tiene un solo límite.

DEMOSTRACIÓN. Sean a y b límites de una sucesión convergente $\{x_n\}$. Entonces, empleando la representación especial (3.5) para los elementos x_n de la sucesión convergente $\{x_n\}$, obtenemos $x_n=a+ +\alpha_n$, $x_n=b+\beta_n$, donde α_n y β_n son elementos de las sucesiones infinitesimales $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$.

*) Véase también las desigualdades (2.5) del p. 4 del § 1 en el cap. 2.

Sustrayendo las relaciones escritas hallemos $\alpha_n - \beta_n = b - a$. Ya que todos los elementos de la sucesión infinitesimal $\{\alpha_n - \beta_n\}$ tienen un mismo valor constante $b - a$, entonces según el teorema 3.5, $b - a = 0$, es decir, $b = a$. El teorema queda demostrado.

Teorema 3.8. *La sucesión convergente está acotada.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\{x_n\}$ sucesión convergente y a, su límite. Empleando la fórmula (3.5), tenemos

$$x_n = a + \alpha_n$$

donde α_n es elemento de una sucesión infinitesimal. Ya que la sucesión infinitesimal $\{\alpha_n\}$ está acotada (véase el teorema 3.3) existe un número A tal que para todos los números n es válida la desigualdad $|\alpha_n| \leqslant A$. Por eso, $|x_n| \leqslant |a| + A$ para todos los números n, lo que significa el carácter acotado de la sucesión $\{x_n\}$. El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. Una sucesión acotada puede no ser convergente. Por ejemplo, la sucesión $1, -1, 1, -1, \ldots$, está acotada, pero no es convergente. En efecto, si esta sucesión convergiera a un número a, entonces cada una de las sucesiones $\{x_n, -a\}$ y $\{x_{n+1} - a\}$ sería infinitesimal. Pero entonces, en virtud del teorema 3.2, la sucesión $\{(x_n - a) - (x_{n+1} - a)\} = \{x_n - x_{n+1}\}$ sería infinitesimal, lo que es imposible, puesto que $|x_n - x_{n+1}| = 2$ para cualquier número n.

Demostremos los siguientes teoremas fundamentales.

Teorema 3.9. *La suma de sucesiones convergentes $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ es sucesión convergente cuyo límite es igual a la suma de los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean a y b límites de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, respectivamente. Entonces,

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n,$$

donde α_n y β_n son sucesiones infinitesimales. Por consiguiente, $(x_n + y_n) - (a + b) = \alpha_n + \beta_n$.

De este modo, la sucesión $\{(x_n + y_n) - (a + b)\}$ es infinitesimal y, por eso, la sucesión $\{x_n + y_n\}$ converge y tiene el número $a + b$ por su límite.

Teorema 3.10. *La diferencia de sucesiones convergentes $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ es sucesión convergente cuyo límite es igual a la diferencia de los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$.*

La demostración de este teorema es análoga a la del teorema 3.9.

Teorema 3.11. *El producto de sucesiones convergentes $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ es sucesión convergente cuyo límite es igual al producto de los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Si a y b son los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, respectivamente, entonces $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$ y

$x_n\cdot y_n = a\cdot b + a\cdot\beta_n + b\cdot\alpha_n + \alpha_n\cdot\beta_n$. Por consiguiente,

$$x_n\cdot y_n - a\cdot b = a\cdot\beta_n + b\cdot\alpha_n + \alpha_n\cdot\beta_n.$$

En virtud del teorema 3.4, su corolario y el teorema 3.1, la sucesión $\{a\cdot\beta_n + b\cdot\alpha_n + \alpha_n\cdot\beta_n\}$ es infinitesimal, es decir, la sucesión $\{x_n\cdot y_n - a\cdot b\}$ es también infinitesimal, por eso la sucesión $\{x_n \times \times y_n\}$ converge y tiene el número $a\cdot b$ por su limite.

Para demostrar el teorema correspondiente para el cociente de dos sucesiones necesitamos el lema siguiente.

Lema 1. *Si una sucesión $\{y_n\}$ converge y tiene límite b diferente de cero, entonces, partiendo de cierto número, es definida la sucesión $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ que es acotada.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varepsilon = |b|/2$. Como $b \neq 0$, se tiene $\varepsilon > 0$. Sea N el número correspondiente a este ε, partiendo del cual se cumple la desigualdad $|y_n - b| < \varepsilon$ o bien $|y_n - b| < |b|/2$. De esta desigualdad se desprende que para $n \geqslant N$ se cumple la desigualdad *) $|y_n| > |b|/2$. Por eso, cuando $n \geqslant N$ tenemos $\left|\frac{1}{y_n}\right| < \frac{2}{|b|}$. Por consiguiente, partiendo de este número N, podemos considerar la sucesión $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ que es acotada. El lema 1 queda demostrado.

Teorema 3.12. *El cociente de dos sucesiones convergentes $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ es sucesión convergente cuyo límite es igual al cociente de los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, si se observa la condición de que el límite $\{y_n\}$ es diferente de cero.*

DEMOSTRACIÓN. Del lema demostrado 1 se desprende que partiendo de cierto número N, los elementos de la sucesión $\{y_n\}$ son diferentes de cero y la sucesión $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ es acotada. Partiendo de este número, consideremos la sucesión $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$. Sean a y b los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$. Demostremos que la sucesión $\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right\}$ es infinitesimal. En efecto, como $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + + \beta_n$, se tiene

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n\cdot b - y_n\cdot a}{y_n\cdot b} = \frac{1}{y_n}\left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right).$$

Ya que la sucesión $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ es acotada y la sucesión $\left\{\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right\}$

---

*) En realidad, ya que $b = (b - y_n) + y_n$ y $|b - y_n| < \frac{|b|}{2}$, entonces $|b| \leqslant |b - y_n| + |y_n| < \frac{|b|}{2} + |y_n|$.

es infinitesimal, entonces la sucesión $\left\{\frac{1}{y_n}\left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right)\right\} = \left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right\}$ es infinitesimal. El teorema queda demostrado.

3. Paso al límite en las desigualdades. Acabamos de demostrar que las operaciones aritméticas sobre las sucesiones convergentes llevan a las mismas operaciones aritméticas sobre sus límites. En este punto mostremos que, pasando al límite, las desigualdades válidas para los elementos de sucesiones convergentes se convierten en las desigualdades correspondientes para los límites de estas sucesiones.

***Teorema* 3.13.** *Si, partiendo de cierto número, los elementos de una sucesión convergente $\{x_n\}$ satisfacen la desigualdad $x_n \geqslant b$ ($x_n \leqslant b$), entonces el límite a de esta sucesión satisface también la desigualdad $a \geqslant b$ ($a \leqslant b$).*

DEMOSTRACIÓN Sea que, partiendo por lo menos de cierto número, todos los elementos x_n satisfacen la desigualdad $x_n \geqslant b$. Es necesario demostrar la desigualdad $a \geqslant b$. Supongamos que $a < b$. Ya que a es el límite de la sucesión $\{x_n\}$, para el positivo $\varepsilon = b - a$ se puede indicar un número N tal que para $n \geqslant N$ se cumple la desigualdad $|x_n - a| < b - a$. Esta desigualdad es equivalente a dos desigualdades siguientes: $-(b - a) < x_n - a < b - a$. Empleando la parte derecha de estas desigualdades obtenemos $x_n < b$ que contradice la condición del teorema. El caso de $x_n \leqslant b$ se considera análogamente. El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. Los elementos de la sucesión convergente $\{x_n\}$ pueden verificar la desigualdad estricta $x_n > b$, pero al mismo tiempo, el límite a puede ser igual a b. Por ejemplo, si $x_n = 1/n$, entonces $x_n > 0$, pero $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

***Corolario* 1.** *Si, partiendo de cierto número, los elementos x_n e y_n de sucesiones convergentes $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ satisfacen la desigualdad $x_n \leqslant y_n$, entonces sus límites verifican la misma desigualdad:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n.$$

En efecto, los elementos de la sucesión $\{y_n - x_n\}$ son no negativos y, por eso, es no negativo su límite $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n - \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. De aquí se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n.$$

***Corolario* 2.** *Si todos los elementos de una sucesión convergente $\{x_n\}$ se encuentran en el segmento $[a, b]$, entonces el límite de esta sucesión se halla también en este segmento.*

En efecto, como $a \leqslant x_n \leqslant b$, se tiene $a \leqslant c \leqslant b$.

El siguiente teorema desempeña importante papel para varias aplicaciones.

Teorema 3.14. *Sean* $\{x_n\}$ *y* $\{z_n\}$ *sucesiones convergentes que tiene el límite común* a. *Sea, además, que, partiendo de cierto número los elementos de una sucesión* $\{y_n\}$ *satisfacen las desigualdades* $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$. *Entonces, la sucesión* $\{y_n\}$ *converge y tiene el límite* a.

DEMOSTRACION. Basta demostrar que la sucesión $\{y_n - a\}$ es infinitesimal. Mediante N^* denotemos el número, partiendo del cual se cumplen las desigualdades que se plantean en la condición del teorema. Entonces, partiendo de este mismo número, se cumplirán también las desigualdades $x_n - a \leqslant y_n - a \leqslant z_n - a$. De aquí se desprende que para $n \geqslant N^*$ los elementos de la sucesión $\{y_n - a\}$ satisfacen la desigualdad

$$|y_n - a| \leqslant \text{máx}\{|x_n - a|, \quad |z_n - a|\}.$$

Ya que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede indicar números N_1 y N_2 tales que siendo $n \geqslant N_1$, $|x_n - a| < \varepsilon$ y, siendo $n \geqslant N_2$, $|z_n - a| < \varepsilon$. Sea $N = \text{máx}\{N^*, N_1, N_2\}$. Partiendo de este número, tiene lugar la desigualdad $|y_n - a| < \varepsilon$. Así pues, la sucesión $\{y_n - a\}$ es infinitesimal. El teorema queda demostrado.

§ 3. Sucesiones monótonas

1. Definición de las sucesiones monótonas.

Definición. *Una sucesión* $\{x_n\}$ *se denomina* ***no decreciente*** *(**no creciente**) si todo término de esta sucesión, partiendo del segundo, no es menor (mayor) que el anterior, es decir, para todos los números* n *es válida la desigualdad*

$$x_n \leqslant x_{n+1} \quad (x_n \geqslant x_{n+1}).$$

Las sucesiones no decrecientes y no crecientes se agrupan en la clase de *sucesiones monótonas*. Si todos los números n de los elementos de la sucesión monótona $\{x_n\}$ satisfacen la desigualdad $x_n < x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$, entonces la sucesión $\{x_n\}$ se denomina *creciente* (*decreciente*). Las sucesiones crecientes y decrecientes se denominan también *estrictamente monótonas*.

Las sucesiones monótonas están acotadas superior o inferiormente, a saber: las sucesiones *no crecientes están limitadas superiormente*, y las *no decrecientes, inferiormente* por sus primeros elementos. Por eso, una sucesión no creciente será acotada por ambos lados si está limitada inferiormente y la no decreciente será acotada por ambos lados si está limitada superiormente.

Consideremos ejemplos de sucesiones monótonas.

1. La sucesión 1, 1, 1/2, 1/2, ..., $1/n$, $1/n$, . . . es no creciente. Está

acotada superiormente por su primer elemento igual a la unidad e inferiormente, por el número cero.

2. La sucesión $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n, \ldots$ es no decreciente. Está acotada inferiormente por su primer elemento igual a la unidad y no está acotada superiormente.

3. La sucesión $1/2, 2/3, 3/4, \ldots n/(n+1), \ldots$ es creciente. Está acotada por los dos lados, inferiormente por su primer elemento $1/2$ y superiormente por la unidad.

2. Criterio de convergencia de la sucesión monótona. Vamos a demostrar el siguiente teorema *fundamental*.

***Teorema* 3.15.** *Si una sucesión no decreciente (no creciente)* $\{x_n\}$ *está acotada superiormente (inferiormente) ella converge.*

De acuerdo con el punto anterior, la sucesión $\{x_n\}$, que satisface la condición del teorema 3.15, está acotada. Por eso el teorema 3.15 puede enunciarse brevemente del modo siguiente: *si la sucesión monótona* $\{x_n\}$ *está acotada por ambos lados, ella converge.*

DEMOSTRACION. Ya que la sucesión $\{x_n\}$ está acotada, el conjunto de sus elementos tiene cotas exactas superior $\bar{x}$ e inferior $\underline{x}$ (véase el teorema 2.1). Demostremos que si $\{x_n\}$ es sucesión no decreciente su límite será dicha cota superior exacta $\bar{x}$; si $\{x_n\}$ es sucesión no creciente, su límite será mencionada cota inferior exacta $\underline{x}$. Nos limitemos al caso de la sucesión no decreciente, puesto que para la sucesión no creciente los razonamientos son análogos.

Ya que $\bar{x}$ es cota superior exacta del conjunto de los elementos de la sucesión $\{x_n\}$, para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede indicar un elemento x_N tal que $x_N > \bar{x} - \varepsilon$ y $x_N \leqslant \bar{x}$ (todo elemento x_n no es mayor que la cota superior exacta $\bar{x}$, $x_n \leqslant \bar{x}$). Poniendo en correspondencia dichas desigualdades, obtenemos las desigualdades $0 \leqslant \bar{x} - x_N < \varepsilon$. Ya que $\{x_n\}$ es sucesión no decreciente, para $n \geqslant N$ son válidas las desigualdades $x_N \leqslant x_n \leqslant \bar{x}$. De aquí se desprende que, para $n \geqslant N$, se cumplen las desigualdades $0 \leqslant \bar{x} - x_n \leqslant \bar{x} - x_N$. Anteriormente hemos notado que $\bar{x} - x_N < \varepsilon$ y por eso, para $n \geqslant N$ son válidas las desigualdades $0 \leqslant \bar{x} - x_n < \varepsilon$, de las cuales se desprende la desigualdad $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$. De este modo, queda establecido que $\bar{x}$ es el límite de la sucesión $\{x_n\}$. El teorema queda demostrado.

OBSERVACION 1. *La acotación de una sucesión monótona es la condición necesaria y suficiente de su convergencia.*

En efecto, si una sucesión monótona está acotada, en virtud del teorema 3.15 ella converge; si la sucesión monótona converge, entonces, conforme al teorema 3.8, ella está acotada.

OBSERVACIÓN 2. Una sucesión convergente puede no ser monótona. Por ejemplo, la sucesion $\{x_n\}$ converge y tiene el cero por su límite

si $x_n = (-1)^n/n$. Ya que los signos de los elementos de esta sucesión se alternan, ella no es monótona.

OBSERVACIÓN 3. Si la sucesión $\{x_n\}$ es no decreciente y acotada y $\bar{x}$ es su límito, entonces para todos los números n es válida la desigualdad $x_n \leqslant \bar{x}$. Los elementos de la sucesión acotada no creciente $\{x_n\}$, que converge hacia $\underline{x}$, satisfacen la desigualdad $\underline{x} \leqslant x_n$. La validez de esta afirmación fue establecida al demostrar el teorema 3.15.

***Corolario del teorema* 3.15.** *Sea dado un sistema infinito de segmentos* $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$, $\ldots$, $[a_n, b_n]$, $\ldots$, *en el cual cada segmento posterior se contiene en el anterior* *) *y sea que la diferencia* $b_n - a_n$ *(se denominará longitud del segmento* $[a_n, b_n]$*) tiende a cero cuando* $n \to \infty$ *(el sistema de segmentos que posee estas propiedades se denominará comprimible). Entonces, un punto c que pertenece a todos los segmentos de este sistema existe, y además es único.*

DEMOSTRACIÓN. Ante todo, notemos que el punto c que pertenece a todos los segmentos es único. En efecto si existiera otro punto d perteneciento a todos los segmentos, entonces todo el segmento **) $[c, d]$ pertenecería a todos los segmentos $[a_n, b_n]$. Pero entonces, para cualquier número n, se cumplirían las desigualdades $b_n - a_n \geqslant d - c > 0$, lo que es imposible, puesto que $b_n - a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Ahora demostremos que *existe* el punto c perteneciente a todos los segmentos $[a_n, b_n]$. Ya que el sistema de los segmentos es comprimible, la sucesión de los extremos izquierdos $\{a_n\}$, es no decreciente, y la sucesión de los extremos derechos $\{b_n\}$, no creciente. Puesto que las dos sucesiones están acotadas (todos los elementos de las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ se encuentran en el segmento $[a_1, b_1]$), las dos convergen, según el teorema 3.15. La diferencia $b_n - a_n$ es infinitesimal lo que demuestra que dichas sucesiones tienen límite común. Lo denotemos por c. De la observación 3 se deduce que, para cualquier número n, son válidas las desigualdades $a_n \leqslant c \leqslant b_n$, o sea, el punto c pertenece a todos los segmentos $[a_n, b_n]$.

3. Algunos ejemplos de sucesiones monótonas convergentes. Consideremos ejemplos de sucesiones cuyos límites se hallarán empleando el teorema 3.15 sobre el límite de una sucesión monótona. Además, en este punto vamos a familiarizarnos con el procedimiento general para hallar límites de sucesiones dadas por fórmulas recurrentes ***).

EJEMPLO 1. Consideremos la sucesión $\{x_n\}$ cuyo elemento x_n es igual a

$$x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}}, \quad a > 0.$$

*) Esto significa que $a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_{n-1}$.

**) Para precisión, tomamos $d > c$.

***) La fórmula recurrente (del vocablo latino recurrens) es fórmula que permite expresar el $(n+1)$-ésimo elemento de una sucesión por medio de los valores de sus n primeros elementos.

Esta misma sucesión puede representarse, naturalmente, por la siguiente fórmula recurrente:

$$x_1=\sqrt{a}, \quad x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}.$$

Para argumentar la existencia del límite de la sucesión $\{x_n\}$, demostremos que esta sucesión es *creciente* y *acotada*. Lo primero se averigua inmediatamente. Demostremos que la sucesión $\{x_n\}$ está acotada superiormente por un número A, que es el máximo entre los dos números a y 2. Si $x_n \leqslant a$, lo que se requiere queda demostrado. Si $x_n > a$, entonces, sustituyendo, en el miembro derecho de la desigualdad $x_n^2 = a + x_{n-1} \leqslant a + x_n$, el número a por el número mayor x_n obtenemos $x_n^2 < 2x_n$, de donde $x_n < 2$. Hemos demostrado que la sucesión $\{x_n\}$ está acotada superiormente. Conforme al teorema 3.15, tiene límite. Lo denotemos por medio de c. Es evidente que $c > 0$. De la fórmula recurrente tenemos la relación

$$x_n^2 = a + x_{n-1}$$

que significa que las sucesiones $\{x_n^2\}$ y $\{a + x_{n-1}\}$ son idénticas. Por eso sus límites son iguales. Ya que la primera de estas sucesiones tiene el límite c^2 y la segunda, $a + c$, entonces $c^2 = a + c$. Siendo $c > 0$, hallamos que $c = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

EJEMPLO 2. Ahora consideremos la sucesión $\{x_n\}$ empleando la cual suelen calcular la raíz cuadrada del número positivo a en los ordenadores modernos de acción rápida. Esta sucesión se determina por la siguiente fórmula recurrente:

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right), \quad n=1, 2, \ldots$$

donde como x_1 se puede tomar cualquier número positivo.

Demostremos que esta sucesión converge y tiene el número $\sqrt{a}$ por su límite. Ante todo, demostremos la existencia del límite de la sucesión $\{x_n\}$. Para hacerlo basta argumentar que la sucesión $\{x_n\}$ *está acotada inferiormente y, partiendo del segundo número, es no creciente.* En primer lugar, demostremos que la sucesión $\{x_n\}$ está acotada inferiormente. Por condición, $x_1 > 0$. Pero si $n = 1$ entonces de la fórmula recurrente se desprende que $x_2 > 0$; de aquí y de la misma fórmula se deduce para $n = 2$ que $x_3 > 0$. Prosiguiendo estos razonamientos podremos demostrar que todos los $x_n > 0$.

Ahora demostremos que, *para $n \geqslant 2$ todos los x_n satisfacen la desigualdad $x_n \geqslant \sqrt{a}$.* Escribiendo la fórmula recurrente en la forma $x_{n+1}=\frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{x_n}\right)$, empleemos la desigualdad casi

evidente $t+\frac{1}{t}\geqslant 2$*) que es válida para cualquier $t>0$ $\left(\text{tomamos } t=\frac{x_n}{\sqrt{a}}\right)$. Obtenemos que $x_{n+1}\geqslant\sqrt{a}$, para todo $n\geqslant 1$, es decir, $x_n\geqslant\sqrt{a}$, partiendo del número $n=2$.

En fin, demostremos que *la sucesión* $\{x_n\}$ *no crece si* $n\geqslant 2$. De la fórmula recurrente obtenemos $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{x_n^2}\right)$ y de aquí, teniendo en cuenta que $x_n\geqslant\sqrt{a}$, hallamos $\frac{x_{n+1}}{x_n}\leqslant 1$ o bien $x_n\geqslant x_{n+1}$ (para $n\geqslant 2$). Ya que para $n\geqslant 2$ la sucesión $\{x_n\}$ es no creciente o inferiormente acotada por el número $\sqrt{a}$, ella tiene límite no inferior a $\sqrt{a}$ (véase el teorema 3.13). Denotando este límite por c y tomando en consideración que $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=c$ y $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\right\}=\frac{1}{2}\left(c+\frac{a}{c}\right)$, obtenemos $c=\frac{1}{2}\left(c+\frac{a}{c}\right)$**). Por consiguiente, $c=\sqrt{a}$.

OBSERVACIÓN 1. En los ejemplos considerados hemos empleado el siguiente procedimiento que se usa frecuentemente para buscar el límite de una sucesión. Primeramente argumentamos la existencia del límite y después hallamos su valor numérico, partiendo de la ecuación que se obtiene de la fórmula recurrente al sustituir en ella x_n y x_{n+1} por el valor buscado c del límite de la sucesión $\{x_n\}$.

OBSERVACIÓN 2. Las fórmulas recurrentes se usan con frecuencia en la matemática moderna, puesto que su aplicación lleva a la repetición de operaciones de un mismo tipo que es muy cómodo para realizar cálculos en ordenadores de acción rápida.

Como ya nos hemos convencido, la fórmula recurrente considerada determina el algoritmo para calcular $\sqrt{a}$ (hemos demostrado que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$).

En el Complemento 2 del presente capítulo se examina la velocidad de convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ hacia $\sqrt{a}$. Demostramos que, para cualquier $a>1$, al elegir la primera aproximación x_1 de un modo determinado, la cuarta aproximación x_4 ya nos da el número $\sqrt{a}$ con el error que no supera a 10^{-10}.

*) Para demostrar esta desigualdad basta observar que, para $t>0$, es equivalente a la desigualdad $t^2-2t+1\geqslant 0$.

**) Esta igualdad se desprende de la fórmula recurrente

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right).$$

EJEMPLO 3. Demostremos que la sucesión $\{c_n\}$, en la cual

$$c_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

tiene, para cualquier x fijado, el límite igual a cero. Ya que para un n suficientemente grande la fracción $\frac{|x|}{n+1} < 1$, entonces, partiendo de un número N, tenemos $|c_{n+1}| < |c_n|$ puesto que $|c_{n+1}| = \frac{|x|^n}{n!} \cdot \frac{|x|}{n+1} = |c_n| \cdot \frac{|x|}{n+1}$.

Por consiguiente, partiendo del número N, la sucesión $\{|c_n|\}$ será monótonamente decreciente e inferiormente acotada (por ejemplo, por el cero). Según el teorema 3.15, la sucesión $\{|c_n|\}$ converge. Sea c límite de esta sucesión. De la relación $|c_{n+1}| = |c_n| \cdot \frac{|x|}{n+1}$ se deduce que $c = 0$, puesto que el límite de la sucesión $\{|c_{n+1}|\}$ es igual a c y el límite de la sucesión $\left\{\frac{|x|}{n+1}\right\}$ es igual a cero.

4. El número e. Vamos a aplicar el teorema 3.15 sobre la existencia del límite de una sucesión monótona para demostrar la existencia del límite de la sucesión $\{x_n\}$ cuyo elemento x_n se determina por la fórmula

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Demostremos que esta sucesión *crece y está acotada superiormente*. Empleando la fórmula del binomio de Newton hallamos

$$x_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\frac{1}{n^n}.$$

Vamos a representar esta expresión en la forma siguiente:

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \quad (3.6)$$

Escribimos x_{n+1} del modo completamente análogo:

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Comparando directamente nos cercioramos *) de que

$$x_n < x_{n+1},$$

o sea, la sucesión $\{x_n\}$ es *creciente*.

Para demostrar la acotación superior de esta sucesión observemos que en la relación (3.6) toda expresión entre paréntesis es inferior a la unidad.

Tomando en consideración que $\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}$, cuando $k \geqslant 2$, obtenemos

$$x_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Así pues, la sucesión $\{x_n\}$ crece y está acotada superiormente. Según el teorema 3.15, la sucesión $\{x_n\}$ tiene límite que se denomina número e. Por consiguiente, según la definición,

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

OBSERVACION. Ulteriormente daremos a conocer que el número e desempeña un papel importante en las matemáticas. En el presente punto damos solamente la definición del número e sin explicar el procedimiento para calcularlo con cualquier grado de exactitud. Lo haremos en los pp. 1 y 2 del § 16 en el cap. 8.

Aquí solamente notemos que en virtud de que $x_n < 3$ y de (3.6) se deduce directamente que $2 < x_n$, el número e está comprendido entre los límites

$$2 \leqslant e \leqslant 3 \qquad (3.7)$$

(conforme al corolario 2 del teorema 3.13).

§ 4. Algunas propiedades de sucesiones arbitrarias y conjuntos numéricos

1. Subsucesiones numéricas. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ una sucesión numérica. Consideremos una sucesión arbitraria de números positivos enteros $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$. Seleccionemos de la sucesión $\{x_n\}$ los elementos de los números $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ y coloquémoslos en el orden igual al de k_n:

$$x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$$

*) Porque $\left(1 - \frac{k}{n}\right) < \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)$, para cualquier $0 < k < n$ y, además, x_{n+1} contiene un término positivo más que x_n.

La sucesión obtenida se denominará *subsucesión* de la sucesión $\{x_n\}$. En particular, la propia sucesión $\{x_n\}$ puede considerarse como subsucesión (en este caso $k_n = n$). Mencionemos la siguiente propiedad de subsucesiones de una sucesión convergente: *si la sucesión $\{x_n\}$ converge y tiene el número a por su límite, entonces toda subsucesión de esta sucesión también converge y tiene el número a por su límite.* En efecto, ya que $\{x_n\}$ es sucesión convergente y a, su límite, entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede indicar un número N tal que, para $n \geqslant N$, se cumple $|x_n - a| < \varepsilon$. Sea $\{x_{k_n}\}$ una subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$. Ya que $k_N \geqslant N$, entonces, partiendo de un número k_N los elementos de la subsucesión $\{x_{k_n}\}$ satisfacen la desigualdad $|x_{k_n} - - a| < \varepsilon$. Por eso la subsucesión $\{x_{k_n}\}$ converge y tiene el número a por su límite. Es también válida la afirmación inversa: *si todas las subsucesiones de una sucesión dada $\{x_n\}$ convergen, entonces los límites de todas estas subsucesiones son iguales a un mismo número a; en particular, la sucesión $\{x_n\}$ converge también hacia este número.* En realidad, ya que la sucesión $\{x_n\}$ es también subsucesión, entonces ella converge y tiene por límite el número a. Pero, entonces cualquier otra subsucesión también converge y tiene el mismo límite a.

Las subsucesiones de sucesiones infinitas poseen la propiedad análoga, a saber, *toda subsucesión de una sucesión infinita es también infinita.* La demostración de esta afirmación es análoga a la de la afirmación referente a la subsucesión de sucesiones convergentes.

OBSERVACIÓN De toda sucesión convergente se puede extraer una subsucesión convergente monótona. En efecto, si $\{x_n\}$ es sucesión convergente y a es su límite, entonces tiene lugar al menos uno de los tres casos siguientes: 1) existe un número infinito de elementos de la sucesión iguales a a; 2) en cualquier ε-entorno del punto a hay un número infinito de elementos que satisfacen la desigualdad $x_n < < a$; 3) en cualquier ε-entorno del punto a existe un número infinito de elementos que satisfacen la desigualdad $x_n > a$ *). En el primer caso, la subsucesión monótona convergente es la subsucesión de elementos iguales a a. El segundo y tercer casos se examinan de manera igual, por eso nos limitamos a considerar el segundo caso, cuando en cualquier ε-entorno del punto a existen muchos elementos x_n que satisfacen la desigualdad $x_n < a$. En otras palabras, consideremos el caso cuando todo intervalo $(a - \varepsilon, a)$ comprende un número infinito de elementos de la sucesión. Sea x_{k_1} uno de estos elementos, $x_{k_1} < a$. Del conjunto infinito de los elementos de la sucesión $\{x_n\}$ situados en el intervalo (x_{k_1}, a) seleccionemos algún elemento x_{k_2} cuyo número k_2 es mayor que el de k_1. Después, del conjunto infinito de los elementos de la sucesión $\{x_n\}$ situados en el intervalo (x_{k_2}, a) selec-

*) Si ninguno de estos casos tuviera lugar, entonces en cierto ε-entorno del punto a existiría solamente un número finito de elementos de la sucesión, es decir, el punto a no sería límite de la sucesión.

cionemos un elemento x_{k_3} para el cual $k_3 > k_2$. Siguiendo ilimitadamente este proceso, obtendremos una subsucesión monótonamente creciente $\{x_{k_n}\}$ de la sucesión $\{x_n\}$ que, en virtud de la propiedad de subsucesiones de una sucesión convergente mencionada en este punto, converge hacia a.

Notemos que de toda sucesión infinita se puede extraer una subsucesión infinita monótona.

2. **Puntos límite de una sucesión.**

Definición 1. *Un punto x de la recta infinita se denomina* **punto límite** *de una sucesión $\{x_n\}$ si en cualquier ε-entorno de este punto existe un número infinito de elementos de la sucesión $\{x_n\}$.*

Es válido el lema siguiente.

Lema 2. *Si x es punto límite de la sucesión $\{x_n\}$, entonces de esta sucesión se puede extraer una subsucesión $\{x_{k_n}\}$ que converge hacia el número x.*

DEMOSTRACION. Sea x punto límite de la sucesión $\{x_n\}$. Consideremos el sistema de ε-entornos del punto x, para los cuales ε es sucesivamente igual a 1, 1/2, 1/3, . . ., $1/n$, . . . En el primero de estos entornos seleccionemos un elemento x_{k_1} de la sucesión $\{x_n\}$, y en el segundo, un elemento x_{k_2} tal que $k_2 > k_1$. En el tercero vamos a escoger un elemento x_{k_3} tal que $k_3 > k_2$. Este proceso puede continuarse ilimitadamente, puesto que en todo ε-entorno del punto x existe un número infinito de elementos de la sucesión $\{x_n\}$. Como resultado, obtenemos la subsucesión $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$ de la sucesión $\{x_n\}$, que converge hacia x, puesto que $|x_{k_n} - x| < \frac{1}{n}$. El lema queda demostrado.

OBSERVACION. Es también válida la afirmación inversa: si de la sucesión $\{x_n\}$ se puede extraer una subsucesión convergente al número x, entonces el número x es punto límite de la sucesión $\{x_n\}$. En efecto, en todo ε-entorno del punto x existe un número infinito de elementos de la subsucesión extraída y, por lo tanto, de la propia sucesión $\{x_n\}$.

De este modo, se puede dar otra definición del punto límite de una sucesión equivalente a la definición 1.

Definición 2. *El punto x se denomina punto límite de la sucesión $\{x_n\}$ si de esta sucesión se puede extraer una subsucesión convergente hacia x.*

Notemos la siguiente afirmación.

Lema 3. *Toda sucesión convergente tiene un solo punto límite que coincide con el límite de esta sucesión.*

DEMOSTRACION. En primer lugar, notemos que el límite a de la sucesión convergente $\{x_n\}$ es punto límite de esta sucesión, puesto que todo ε-entorno del punto a comprende todos los elementos de la sucesión, partiendo de cierto número vamos a convencernos de que la

sucesión convergente no tiene otros puntos límite. En efecto, sea b punto límite de la sucesión convergente. En virtud del lema 2, de $\{x_n\}$ se puede extraer una subsucesión $\{x_{k_n}\}$ que converge hacia b pero cualquier subsucesión de la sucesión convergente tiene el límite a (véase el p. 1 de este párrafo) y, por eso, $b = a$.

Aduzcamos el ejemplo de una sucesión que tiene dos puntos límite. Demostremos que la sucesión

$$1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{3},\ 2,\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ 2,\ \ldots$$

tiene sólo dos puntos límite 0 y 2. Es obvio que estos puntos son puntos límite de la sucesión considerada, puesto que la subsucesión 1, 1/2, 1/3, ..., $1/n$, ... de esta sucesión tiene por límite el cero y la



Fig. 3.1

subsucesión 2, 2, ..., 2, ... tiene por límite 2 *). Esta sucesión no tiene otros puntos límite. En efecto, sea x cualquier punto del eje numérico, diferente de 0 y 2. Consideremos ε-entornos de los puntos 0, 2 y x que no se cruzan (fig. 3.1). Los ε-entornos de los punto 0 y 2 comprenden, partiendo de cierto número, todos los elementos de la sucesión y, por eso, dicho ε-entorno del punto x comprende sólo un número finito de sus elementos, o sea, x no es punto límite.

3. Existencia del punto límite de una sucesión acotada. Es válida la siguiente afirmación notable.

Teorema 3.16. *Toda sucesión acotada tiene por lo menos un punto límite.*

DEMOSTRACION. Ya que la sucesión $\{x_n\}$ está acotada, entonces existen números reales m y M tales que todos los elementos x_n de la sucesión $x\{_n\}$ satisfacen las desigualdades $m \leqslant x_n \leqslant M$. *Consideremos un conjunto $\{x\}$ de números reales x tales que a la derecha* **) *de cada uno de estos números ora no hay ningún elemento de la sucesión $\{x_n\}$ ora se tiene solo un número finito de estos elementos.* El conjunto $\{x\}$ tiene al menos un elemento (por ejemplo, el número M) y está acotado inferiormente (por cualquier número menor que m). En virtud del teorema 2.1, el conjunto $\{x\}$ tiene la cota inferior exacta que se denotará por $\overline{x}$ ***).

---

*) Véase la definición 2 del punto límite.

**) Decimos que el número a está a la derecha del número b si $a > b$ (véase el § 2 del cap. 2).

***) En adelante vamos a aclarar por qué denotamos esta cota inferior por el símbolo $\overline{x}$.

Demostremos que este número $\overline{x}$ es punto límite de la sucesión $\{x_n\}$. Sea ε cualquier número positivo. Sabemos de antemano que el número $\overline{x} - \varepsilon$ no pertenece al conjunto $\{x\}$, por eso *a la derecha del número $\overline{x} - \varepsilon$ se encuentra un número infinito de elementos de la sucesión* $\{x_n\}$. Por la definición de la cota inferior exacta, en el conjunto $\{x\}$ existe un número x' que satisface las desigualdades $\overline{x} \leqslant \overline{x}' < \overline{x} +$

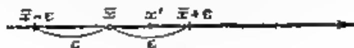


Fig. 3.2

$+\ \varepsilon$ (fig. 3.2). Por la definición del conjunto $\{x\}$, *a la derecha de x' se encuentra no más de un número finito de elementos de la sucesión* $\{x_n\}$. Por tanto, en el semisegmento $(\overline{x} - \varepsilon, x']$, y, más que eso, en el ε-entorno del punto $\overline{x}$ está comprendido un número infinito de elementos de la sucesión, o sea, $\overline{x}$ es punto límite de la sucesión $\{x_n\}$. El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN 1. Volvamos a examinar el conjunto $\{x\}$ introducido al demostrar el teorema 3.16. Hemos demostrado que la cota inferior exacta $\overline{x}$ de este conjunto es punto límite de la sucesión $\{x_n\}$.



Fig. 3.3

Demostremos que *ningún número x superior a $\overline{x}$ es punto límite de la sucesión* $\{x_n\}$, o sea, $\overline{x}$ es el máximo punto límite de esta sucesión. Sea x cualquier número superior a $\overline{x}$. Seleccionemos $\varepsilon > 0$ tan pequeño que el número $x - \varepsilon$ también supere al número $\overline{x}$ (fig. 3.3). Por la definición de la cota inferior exacta existe un número x' del conjunto $\{x\}$, que se encuentra a la izquierda de $x - \varepsilon$. Por la definición del conjunto $\{x\}$, a la derecha de x' y, por tanto, en el ε-entorno del punto x se encuentra no más de un número finito de elementos de la sucesión $\{x_n\}$. Esto demuestra que x no es punto límite.

Definición. *El máximo punto límite $\overline{x}$ de la sucesión $\{x_n\}$ se denomina* ***límite superior*** *de esta sucesión y se denota por el símbolo* $\overline{x} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

La observación 1 permite afirmar que *toda sucesión acotada tiene límite superior*. De manera completamente análoga se introduce el concepto del *límite inferior* $\underline{x}$ de la sucesión $\{x_n\}$ que se define como el mínimo punto límite de esta sucesión. Para el límite inferior se usa la denotación $\underline{x} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

La existencia del límite inferior de cualquier sucesión acotada $\{x_n\}$ se demuestra análogamente a los razonamientos del teorema 3.16 y la observación 1 de este teorema. Pero esta vez se debe considerar el conjunto $\{x\}$ de números reales x tales que *a la izquierda* de cada uno de estos números yace no más de un número finito de elementos de esta sucesión.

Así pues, llegamos a la siguiente afirmación.

Toda sucesión acotada tiene límite superior e inferior.

Demostremos otra serie de corolarios del teorema 3.16 y la observación 1.

Corolario 1. *Si* (a, b) *es intervalo fuera del cual se encuentra sólo un número finito de elementos de la sucesión acotada* $\{x_n\}$, *y* $\underline{x}$ *y* $\overline{x}$ *son límites inferior y superior de esta sucesión, entonces el intervalo* $(\underline{x}, \overline{x})$ *está comprendido en el intervalo* (a, b) *y por eso* $\overline{x} - \underline{x} \leqslant b - a$.

DEMOSTRACIÓN. Ya que a la derecha del punto b se encuentra no más de un número finito de elementos de la sucesión, b pertenece al conjunto $\{x\}$, mencionado en la demostración del teorema 3.16 y, por eso $\overline{x} \leqslant b$. Haciendo razonamientos análogos, nos cercioramos de que $a \leqslant \underline{x}$, lo que significa que el intervalo (a, b) comprende el intervalo $(\underline{x}, \overline{x})$.

Corolario 2. *Para cualquier número positivo* ε *el intervalo* $(\underline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon)$ *comprende todos los elementos de la sucesión* $\{x_n\}$, *partiendo de cierto número (que depende, sin duda, de* ε*).*

DEMOSTRACIÓN. Ya que $\overline{x}$ es cota inferior exacta del conjunto $\{x\}$ mencionado en la demostración del teorema 3.16, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número x' menor de $\overline{x} + \varepsilon$ y perteneciente a $\{x\}$. Esto significa que a la derecha de x' y, por tanto, *a la derecha del intervalo* $(\underline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon)$ *puede estar sólo un número finito de elementos de la sucesión* $\{x_n\}$. Se demuestra análogamente que a la izquierda del intervalo $(\underline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon)$ puede estar sólo un número finito de elementos de la sucesión $\{x_n\}$.

OBSERVACIÓN 2. Vamos a aclarar cuántos puntos límite puede tener una sucesión acotada $\{x_n\}$.

Denotemos mediante $\underline{x}$ y $\overline{x}$ los límites inferior y superior, respectivamente, de esta sucesión. Es obvio que todos los puntos límite de la sucesión $\{x_n\}$, tantos como sean, están situados en el segmento $[\underline{x}, \overline{x}]$.

Si $\underline{x} = \overline{x}$ *), la sucesión tiene un solo punto límite. Si $\underline{x} < \overline{x}$, la sucesión tiene al menos dos puntos límite $\underline{x}$ y $\overline{x}$. Notemos que la su-

*) A continuación demostraremos que la igualdad $\underline{x} = \overline{x}$ y la condición de acotación son condiciones necesarias y suficientes de convergencia de la sucesión.

cesión puede tener un número cualquiera e incluso infinito de puntos límite. La sucesión 1, 2, 1/2, 2, . . ., $1/n$, 2, . . ., considerade en el punto anterior, tiene sólo dos puntos límite: el límite inferior $\underline{x} = 0$ y el superior $\overline{x} = 2$. Aduzcamos el ejemplo de una sucesión que tiene número infinito de puntos límite. Por ejemplo, consideremos la sucesión cuyos elementos recorren, sin repetirse, todos los números racionales del segmento [0, 1] *). Es obvio que todo punto de este segmento será punto límite de dicha sucesión.

4. **Extracción de una subsucesión convergente.** Los resultados del punto anterior llevan al siguiente teorema *fundamental.*

Teorema 3.17. (teorema de Bolzano—Weierstrass **). *De toda sucesión acotada se puede extraer una subsucesión convergente.*

DEMOSTRACIÓN. Ya que le sucesión está acoteda, tiene al menos un punto límite x. En este caso, de esta sucesión se puede extraer une subsucesión convergente al punto x (véase la definición 2 del punto límite).

OBSERVACIÓN 1. *De cualquier sucesión acotada se puede extraer una subsucesión monótona.* Efectivamente, en virtud del teorema de Bolzano—Weierstrass, de cualquier sucesión acotada se puede extreer una subsucesión convergente, de la cual, conforme a la observación del punto 1 del presente párrafo, se puede extraer una subsucesión monótona.

OBSERVACIÓN 2. *Sea $\{x_n\}$ sucesión acotada cuyos elementos se encuentran en el segmento $[a, b]$. Entonces, el límite c de toda subsucesión convergente $\{x_{k_n}\}$ está situado también en el segmento $[a, b]$.* En efecto, como $a \leqslant x_{k_n} \leqslant b$, en virtud del corolario 2 del teorema 3.13 se cumplen las desigualdades $a \leqslant c \leqslant b$ lo que significa que c se encuentra en el segmento $[a, b]$.

Notemos que en algunos casos se puede extraer también una subsucesión convergente de le sucesión no acotada. Así, la sucesión 1, 1/2, 2, 1/3, . . ., n, $1/(n+1)$, . . . es no acotada, pero la subsucesión 1/2, 1/3, . . ., $1/n$, . . . de sus elementos de números pares converge. Sin embargo, no de toda sucesión no acotada puede extraerse una subsucesión convergente. Por ejemplo, cualquier subsucesión de la su-

*) Por ejemplo, los números racionales del segmento [0, 1] pueden disponerse en una sucesión sin repeticiones del modo siguiente. Consideremos grupos de números racionales de este segmento, poniendo los números 0 y 1 en el primer grupo, el número 1/2, en el segundo, todos los números no simplificables p/q con el denominador 3, en el tercero, y, en general, todas las fracciones racionales no simplificables con el denominador n, del segmento [0, 1] en el n-ésimo grupo. Es evidente que todo número racional estará en cierto grupo y todo grupo tendrá sólo un número finito de números racionales. Escribamos ahora los elementos del primer grupo uno tras otro, luego los elementos del segundo grupo, después los del tercero, etc. Como resultado obtenemos la sucesión necesaria.

**) Bernhard Bolzano, filósofo y matemático checo (1781—1848), Karl Weierstrass, matemático alemán (1815—1897).

cesión no acotada 1, 2, . . ., n, . . . diverge. Por eso, hablando en general, no se puede transferir el teorema de Bolzano—Weierstrass para sucesiones no acotadas.

El teorema análogo para sucesiones no acotadas es la siguiente afirmación.

Lema 4. De toda sucesión no acotada se puede extraer una subsucesión infinita.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n\}$ sucesión no acotada. Entonces existe un elemento x_{k_1} de esta sucesión que satisface la condición $|x_{k_1}| > 1$, un elemento x_{k_2} de la misma que satisface las condiciones $|x_{k_2}| > 2$, $k_2 > k_1$, . . ., un elemento x_{k_n} de la misma que satisface las condiciones $|x_{k_n}| > n$, $k_n > k_{n-1}$, etc. Obviamente, la subsucesión x_{k_1}, x_{k_2}, . . ., x_{k_n}, . . . es infinita.

Del lema 4 y del teorema de Bolzano—Weierstrass se desprende la siguiente afirmación.

Lema 5. De una sucesión completamente arbitraria se puede extraer una subsucesión ora convergente ora infinita.

OBSERVACIÓN 3. Los resultados del presente punto permiten ampliar de algún modo el concepto de punto límite y límites superior e inferior de la sucesión.

Diremos que $+\infty$ ($-\infty$) es punto límite de la sucesión $\{x_n\}$ si de esta sucesión se puede extraer una subsucesión infinita compuesta de elementos positivos (negativos).

Si el concepto de punto límite está ampliado de esta manera, entonces, la sucesión puede tener, excepto puntos límite finitos, otros dos puntos límite $+\infty$ y $-\infty$. En este caso, el lema 5 permite afirmar que *una sucesión completamente arbitraria tiene al menos un punto límite* *).

Teniendo en cuenta lógicamente que $+\infty$ y $-\infty$ están ligados con cualquier número real finito x por la relación $-\infty < x < +\infty$, vamos a convencernos de que una *sucesión completamente arbitraria tiene límites superior e inferior* (es decir, puntos límite máximo y mínimo).

Para que sea más preciso, fundamentamos la existencia del límite superior.

En virtud de la observación 1 para el teorema 3.16, basta considerar solamente el caso cuando la sucesión $\{x_n\}$ *no es acotada*. Si, además, $\{x_n\}$ no es acotada superiormente, de ella se puede extraer una subsucesión infinita cuyos elementos son todos positivos y, por eso, $+\infty$ es punto límite y, por tanto, límite superior de $\{x_n\}$.

Consideremos el caso cuando la sucesión no acotada $\{x_n\}$ es superiormente acotada, o sea, existe un número real M tal que todos los elementos $\{x_n\}$ satisfacen la condición $x_n \leqslant M$. Puesto que la sucesión $\{x_n\}$ no es acotada inferiormente, de ella se puede extraer una subsucesión infinita cuyos elementos son todos negativos lo que significa que $-\infty$ es punto límite de la sucesión considerada.

Si, al mismo tiempo, la sucesión no tiene ningún punto límite finito, entonces $-\infty$ es el único punto límite y, por eso, es el límite superior de la sucesión considerada. Demostremos que si, la sucesión tiene, excepto $-\infty$, al menos un punto límite finito x_0, en este caso tiene límite superior. Ya que todos los elementos x_n satisfacen la condición $x_n \leqslant M$, en virtud del teorema 3.13 x_0 satisface también la condición $x_0 \leqslant M$. Fijemos arbitrariamente un $\varepsilon > 0$. Ya que en el ε-entorno de x_0 se encuentra un número infinito de elementos de la sucesión $\{x_n\}$, entonces en el segmento $[x_0 - \varepsilon, M]$ también se encontrará un número infinito de estos elementos.

Vamos a extraer de la sucesión $\{x_n\}$ una subsucesión de sus elementos que se encuentran en el segmento $[x_0 - \varepsilon, M]$. La subsucesión extraída es acotada.

*) Ora finito ora infinito.

Por eso, en virtud de la observación 1 para el teorema 3.16, tiene límite superior, es decir, el máximo punto límite $\overline{x}$. Es obvio que $\overline{x} \geqslant x_0$ es también punto límite de toda la sucesión $\{x_n\}$. Es evidente también que la sucesión $\{x_n\}$ no tiene puntos límite superiores a $\overline{x}$, puesto que, si un número $\overline{\overline{x}}$ superior a x fuera punto límite de la sucesión $\{x_n\}$, entonces, debido a que todos los elementos de la sucesión $\{x_n\}$ mayores que el número $x_0 - \varepsilon$ son también elementos de la subsucesión extraída, el número $\overline{x}$ sería punto límite de la subsucesión extraída, mientras esta subsucesión no tiene puntos límite superiores a x.

Pues, el número $\overline{x}$ es el máximo punto límite de la sucesión considerada.

La existencia del límite superior de una sucesión completamente arbitraria queda demostrada.

De manera análoga se demuestra la existencia del límite inferior.

5. Condición necesaria y suficiente de convergencia de la sucesión. Cuando determinamos la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ empleando su definición, debemos estimar la diferencia entre elementos x_n de esta sucesión y su límite supuesto a. En otras palabras, debemos evaluar a qué equivale el límite a de esta sucesión.

Es lógico proponer un criterio «interior» de convergencia de la sucesión que permite determinar su convergencia tomando en consideración sólo el valor de sus elementos. Para enunciar este criterio en el presente punto introducimos el concepto de sucesión fundamental.

Definición. *La sucesión $\{x_n\}$ se denomina* ***fundamental*** *si para cualquier ε positivo existe un número N tal que para todos los números n que satisfacen la condición $n \geqslant N$ y para todos los números naturales p ($p = 1, 2, \ldots$) es válida la desigualdad*

$$| x_{n+p} - x_n | < \varepsilon.$$

En el presente punto vamos a demostrar el siguiente criterio de convergencia de la sucesión el llamado criterio de Cauchy *) *para que la sucesión sea convergente es necesario y suficiente que sea fundamental.*

Antes de pasar a la demostración del criterio de Cauchy, tenemos que demostrar algunas proposiciones auxiliares que nos interesan de por sí.

Teorema 3.18. *Para que la sucesión $\{x_n\}$ sea convergente es necesario y suficiente que sea acotada y que sus límites superior e inferior $\overline{x}$ y $\underline{x}$ coincidan.*

DEMOSTRACIÓN 1) NECESIDAD. Sea que la sucesión $\{x_n\}$ converge. Entonces, es acotada (conforme al teorema 3.8) y tiene un solo punto límite (en virtud del lema 3 del p. 2). De este modo, $\underline{x} = \overline{x}$.

2) SUFICIENCIA. El corolario 2 del teorema 3.16 comprueba que para cualquier $\varepsilon > 0$ el intervalo $(\underline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon)$ comprende todos los

*) Augusten Louis Cauchy, matemático francés (1789—1857).

elementos de la sucesión $\{x_n\}$ a partir de cierto número. Ya que $\underline{x} = \overline{x} = x$, dicho intervalo coincide con el ε-entorno del punto x, o sea, el punto x es límite de la sucesión $\{x_n\}$ (véase la observación 1 del p. 1 en el § 2).

Vamos a argumentar ahora la propiedad importante de la sucesión fundamental que se desprende directamente de su definición:

Para cualquier número positivo ε se puede indicar un elemento x_N de la sucesión fundamental en cuyo ε-entorno están todos los elementos de la sucesión a partir del número N. En otras palabras, fuera del intervalo $(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$ se encuentra no más de un número finito de elementos de la sucesión *).

En efecto, de la definición de la sucesión fundamental se deduce: para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede indicar un número N tal que para todos los p naturales ($p = 1, 2, 3, \ldots$) se cumple la desigualdad $|x_{N+p} - x_N| < \varepsilon$ que significa que en el ε-entorno del elemento x_N se encuentran todos los elementos de la sucesión a partir del número N.

La propiedad mencionada permite establecer el carácter acotado de la sucesión fundamental. En efecto, sea ε un número positivo fijado y x_N el elemento en cuyo ε-entorno se encuentran todos los elementos de la sucesión a partir del número N. Entonces, fuera de este ε-entorno pueden estar sólo los elementos $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$. Pongamos

$$A = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|, |x_N - \varepsilon|, |x_N + \varepsilon|\} \text{ **)}.$$

Entonces, en el segmento $[-A, +A]$ están los números $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon$, y, por consiguiente, todos los puntos del ε-entorno del elemento x_N. De aquí se desprende que todos los elementos de la sucesión fundamental están en el segmento $[-A, +A]$ lo que significa su carácter acotado.

Pasamos a demostrar la afirmación principal del presente punto.

***Teorema 3.19* (*criterio de Cauchy de convergencia de la sucesión*).** *Para que la sucesión $\{x_n\}$ sea convergente es necesario y suficiente que sea fundamental.*

DEMOSTRACION. 1) NECESIDAD. Sea que la sucesión $\{x_n\}$ converge y x es su límite. Hay que demostrar que esta sucesión es fundamental. Tomemos *cualquier* número positivo ε. De la definición de la sucesión convergente se desprende que para el número $(\varepsilon/2) > 0$ existe un número N tal que para $n \geqslant N$ se cumple la desigualdad $|x_n - x| < \varepsilon/2$.

Si p es cualquier número natural, entonces para $n \geqslant N$ se cumple también la desigualdad $|x_{n+p} - x| < \varepsilon/2$.

---

*) Notemos que dicha propiedad es equivalente a la definición de la sucesión fundamental.

**) Esto significa geométricamente que A es igual a la máxima distancia del origen de referencia 0 a los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon$.

Ya que el módulo de la suma de dos magnitudes no es mayor que la suma de sus módulos, empleando dos últimas desigualdades obtendremos que para $n \geqslant N$ y para todos los números naturales p

$$|x_{n+p}-x_n| = |(x_{n+p}-x)+(x-x_n)| \leqslant |x_{n+p}-x| + |x_n - x| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, el carácter fundamental de la sucesión $\{x_n\}$ queda demostrado.

2) SUFICIENCIA. Sea $\{x_n\}$ la sucesión fundamental. Hay que demostrar que esta sucesión converge. Según el teorema 3.18, basta demostrar la acotación de la sucesión $\{x_n\}$ y la igualdad de sus límites superior e inferior $\overline{x}$ y $\underline{x}$. La acotación de la sucesión fundamental fue establecida anteriormente.

Para demostrar la igualdad de los límites superior e inferior $\overline{x}$ y $\underline{x}$ empleamos la propiedad de la sucesión fundamental demostrada anteriormente: para cualquier número positivo ε se puede indicar un elemento x_N tal que fuera del intervalo $(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$ se encuentra no más de un número finito de elementos de la sucesión. Según el corolario 1 del teorema 3.16, el intervalo $(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$ comprende el intervalo $(\underline{x}, \overline{x})$ y, por eso, $\overline{x} - \underline{x} \leqslant 2\varepsilon$ de donde, en virtud de la arbitrariedad de ε, $\overline{x} = \underline{x}$. Por lo tanto, la convergencia es argumentada y el teorema queda demostrado.

EJEMPLO. Apliquemos el criterio de Cauchy para establecer la convergencia de la siguiente sucesión $\{x_n\}$:

$$x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

donde a_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ son números reales arbitrarios que satisfacen la condición $|a_k| \leqslant q^k$, siendo q un número del intervalo $0 < q < 1$.

Sean n cualquier número y p, cualquier número natural. Entonces, es obvio que

$$|x_{n+p}-x_n| = |a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + \\ + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| \leqslant q^{n+1}+q^{n+2}+\ldots+q^{n+p} = \\ = \frac{q^{n+1}-q^{n+1+p}}{1-q} < \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Tomando en consideración que la sucesión $\{q^n\}$ es infinitesimal (véase el ejemplo 1 del p. 3 en el § 1), podemos afirmar que *para cualquier* $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que

$$q^{n+1} < \varepsilon\ (1-q) \quad (\text{para } n \geqslant N).$$

Por lo tanto, para $n \geqslant N$ y cualquier p natural

$$|x_{n+p}-x_n| < \frac{q^{n+1}}{1-q} < \varepsilon,$$

o sea, la sucesión $\{x_n\}$ es *fundamental* y converge, conforme al teorema 3.19.

6. Algunas propiedades de conjuntos numéricos arbitrarios. En este punto consideremos algunas propiedades de *conjuntos numéricos arbitrarios*. Una parte de estas propiedades es análoga a las propiedades de sucesiones numéricas.

En el p. 5 del § 1 del cap. 2 hemos introducido el concepto de *conjunto superiormente* (*inferiormente*) *acotado*. Vamos a llamar *acotado por ambos lados* o simplemente *acotado* el conjunto $\{x\}$ si éste es acotado tanto superior como inferiormente, o sea, existen dos números reales m y M tales que todo elemento x del conjunto $\{x\}$ satisface las desigualdades $m \leqslant x \leqslant M$. El conjunto $\{x\}$ se denominará *finito* o *infinito* en dependencia de si es finito o infinito el número de los elementos que integran este conjunto.

Un punto x de la recta infinita se denominará punto límite del conjunto $\{x\}$ si en cualquier ε-entorno del punto x se encuentra un número infinito de elementos de este conjunto.

El punto $\bar{x}$ (punto $\underline{x}$) se denominará *punto límite superior* (*inferior*) del conjunto $\{x\}$ si este punto es punto límite del conjunto $\{x\}$ y ningún punto mayor de $\bar{x}$ (menor de $\underline{x}$) será punto límite de este conjunto.

Repitiendo literalmente la demostración del teorema 3.16 y sustituyendo el término «sucesión $\{x_n\}$» por el «conjunto $\{x\}$», llegaremos a la siguiente afirmación: *todo conjunto infinito acotado tiene al menos un punto límite.*

Repitiendo literalmente los razonamientos de la observación 1 del teorema 3.16, obtendremos que *todo conjunto infinito acotado tiene puntos límite superior e inferior.* De dichas afirmaciones se desprende el hecho siguiente: *de los elementos de todo conjunto infinito acotado se puede extraer una sucesión convergente.*

A la par con el concepto de conjunto se emplea frecuentemente el de *subconjunto*. El conjunto $\{x'\}$ se denomina *subconjunto del conjunto* $\{x\}$ si todos los elementos del conjunto $\{x'\}$ se contienen en el conjunto $\{x\}$. Por ejemplo, el conjunto de todos los números enteros pares es subconjunto del conjunto de todos los números enteros.

Dos conjuntos $\{x\}$ e $\{y\}$ se denominan *equivalentes* si entre los elementos de estos conjuntos se puede establecer la correspondencia biunívoca *). Notemos que dos conjuntos finitos son equivalentes si, y sólo si, el número de los elementos de un conjunto es igual al número del otro. Aducimos un ejemplo de dos conjuntos infinitos equivalentes. Es fácil notar que el conjunto $\{x\}$ cuyos elementos son los números positivos pares $2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$ es equivalente al conjunto $\{y\}$ cuyos elementos son los números naturales $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ En efecto, establecemos la correspondencia biunívoca entre los elementos de estos conjuntos poniendo en correspondencia al elemento $2n$ del conjunto $\{x\}$ el elemento n del conjunto $\{y\}$. Notemos que el conjunto considerado $\{x\}$ es subconjunto del conjunto $\{y\}$. De este modo, el conjunto infinito $\{y\}$ resulta equivalente a su subconjunto $\{x\}$ **).

Entre todos los conjuntos posibles escogemos dos tipos más importantes:

1°. *Todo conjunto equivalente al conjunto de todos los números naturales $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ se denominará numerable.* De la definición del conjunto numerable se desprende que todos los elementos de este conjunto pueden enumerarse.

2°. *Todo conjunto equivalente al conjunto de los números reales del intervalo $(0, 1)$ se denominará conjunto de potencia de continuo.*

---

*) Se llama *correspondencia biunívoca* entre los elementos de dos conjuntos una correspondencia tal que a todo elemento del primer conjunto le corresponde sólo un elemento del segundo con la particularidad de que todo elemento del segundo conjunto corresponde sólo a un elemento del primero.

**) Es fácil demostrar que cualquier conjunto infinito es equivalente a cierto subconjunto suyo, no coincidente con todo el conjunto. Este hecho puede servir para definir el conjunto infinito.

Aducimos ejemplos de conjuntos numerables y de potencia de continuo. El conjunto considerado anteriormente de los números positivos pares 1, 4, 6, . . ., $2n$, . . . puede servir del primer ejemplo de conjunto numerable. Otro ejemplo de conjunto numerable puede ser el conjunto de todos los números racionales del segmento [0, 1], puesto que, como es demostrado en la nota de la pág. 00, este conjunto puede disponerse como una sucesión sin repeticiones, es decir, puede ser enumerado. Un ejemplo de conjunto de potencia de continuo puede ser el conjunto de todos los números reales (la recta infinita). En efecto, la función $y = \operatorname{ctg} \pi x$ *) establece la correspondencia biunívoca entre los puntos del intervalo $0 < x < 1$ y los puntos de la recta infinita.

Para concluir, demostremos que *el conjunto de potencia de continuo no es equivalente al conjunto numerable*. Es suficiente demostrar que el conjunto de todos los números reales del intervalo (0, 1) no puede ser enumerado. Admitimos lo contrario, es decir, supongamos que pueden ser enumerados todos los números reales del intervalo (0, 1). Entonces, escribiendo estos números en forma de fracciones decimales infinitas, obtenemos la sucesión

$$\begin{array}{l} x_1 = 0,\ a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}\ \ldots, \\ x_2 = 0,\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n}\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = 0,\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Ahora consideremos un número real $x = 0,\ b_1b_2\ldots b_n\ldots$, donde b_1 es cualquier cifra distinta de a_{11}, 0 y 9, b_2, cualquier cifra distinta de a_{22}, 0 y 9, y, en general, b_n es cualquier cifra distinta de a_{nn}, 0 y 9.

Ya que el número x no contiene ceros y nueves a la derecha de la coma, este número no pertenece a la clase de números racionales que pueden representarse de dos maneras en forma de fracciones decimales infinitas **). Pero en este caso, el número x es, sin duda, diferente de *todos* los números $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, ya que la coincidencia del número x con algún x_n significaría la coincidencia de b_n con a_{nn}.

Durante mucho tiempo los matemáticos trataban de resolver el problema de la existencia de un conjunto infinito $\{x\}$ que no es equivalente al conjunto numerable ni al de potencia de continuo, pero es equivalente a una parte del conjunto de potencia de continuo. En 1963, P. Cohen, matemático norteamericano, demostró que la hipótesis de la existencia de este conjunto no depende de otros axiomas de la teoría de conjuntos. Esto significa que se puede construir una teoría de conjuntos internamente consistente, que postula tanto la existencia de este conjunto como su no existencia (véase el libro de P. J. Cohen, Set theory and the continuum hypothesis, Benjamin, New York, 1966).

Complemento 1

Teorema de Schtolz

En muchos casos, para investigar la convergencia del cociente $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ de sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, puede ser útil la siguiente proposición.

Teorema de Schtolz. *Sea $\{y_n\}$ sucesión infinita creciente y sea que la sucesión $\left\{\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\}$ converge y tiene el límite a. Entonces, la sucesión $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$*

*) El lector tiene ciertos conocimientos sobre la función $y = \operatorname{ctg} \pi x$ que se considera en las matemáticas elementales. La construcción estricta de funciones trigonométricas se examina en el cap. 4.

**) Véase el p. 3 del § 1 del cap. 2.

converge y tiene el límite a. De este modo,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}.$$

DEMOSTRACION. Puesto que la sucesión $\left\{\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\right\}$ converge y tiene por límite el número a, la sucesión $\{\alpha_n\}$, en la que $\alpha_n=\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-a$, es infinitesimal. Sea $\overline{N}$ cualquier número fijado y $n>\overline{N}$. Empleando la expresión de α_n consideremos la serie de igualdades:

$$x_{\overline{N}+1}-x_{\overline{N}}=a\left(y_{\overline{N}+1}-y_{\overline{N}}\right)+\alpha_{\overline{N}+1}\left(y_{\overline{N}+1}-y_{\overline{N}}\right),$$
$$x_{\overline{N}+2}-x_{\overline{N}+1}=a\left(y_{\overline{N}+2}-y_{\overline{N}+1}\right)+\alpha_{\overline{N}+2}\left(y_{\overline{N}+2}-y_{\overline{N}+1}\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_{n-1}-x_{n-2}=a\left(y_{n-1}-y_{n-2}\right)+\alpha_{n-1}\left(y_{n-1}-y_{n-2}\right),$$
$$x_n-x_{n-1}=a\left(y_n-y_{n-1}\right)+\alpha_n\left(y_n-y_{n-1}\right).$$

Sumando estas igualdades, hallemos

$$x_n-x_{\overline{N}}=ay_n-ay_{\overline{N}}+\alpha_{\overline{N}+1}\left(y_{\overline{N}+1}-y_{\overline{N}}\right)+$$
$$+\alpha_{\overline{N}+2}\left(y_{\overline{N}+2}-y_{\overline{N}+1}\right)+\dots+\alpha_{n-1}\left(y_{n-1}-y_{n-2}\right)+\alpha_n\left(y_n-y_{n-1}\right).$$

Ya que $\{y_n\}$ es sucesión infinita creciente, entonces, partiendo de cierto número, sus elementos son positivos. Si tomamos $n\geqslant N$, $y_n>0$. Entonces, de la última igualdad obtenemos

$$\frac{x_n}{y_n}-a=\frac{x_{\overline{N}}-ay_{\overline{N}}}{y_n}+$$
$$+\frac{\alpha_{\overline{N}+1}\left(y_{\overline{N}+1}-y_{\overline{N}}\right)+\alpha_{\overline{N}+2}\left(y_{\overline{N}+2}-y_{\overline{N}+1}\right)+\dots+\alpha_n\left(y_n-y_{n-1}\right)}{y_n}.$$

Ya que la sucesión $\{y_n\}$ es creciente, las diferencias $y_{k+1}-y_k$, $k=\overline{N}$, $\overline{N}+1$, ..., $n-1$, son positivas. Por eso, de la última relación tenemos

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|\leqslant\left|\frac{x_{\overline{N}}-ay_{\overline{N}}}{y_n}\right|+$$
$$+\frac{\left|\alpha_{\overline{N}+1}\right|\left(y_{\overline{N}+1}-y_{\overline{N}}\right)+\left|\alpha_{\overline{N}+2}\right|\left(y_{\overline{N}+2}-y_{\overline{N}+1}\right)+\dots+\left|\alpha_n\right|\left(y_n-y_{n-1}\right)}{y_n}.\qquad(3.8)$$

Demostremos ahora que la sucesión $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ converge y tiene el límite a. Es suficiente demostrar que para cualquier ε positivo se puede indicar un número N tal que para $n\geqslant N$ se cumpla la desigualdad $\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|<\varepsilon$. Primero, tomando $\varepsilon>0$ escogemos un número $\overline{N}$ tal que para $n\geqslant\overline{N}$ se cumpla la desigualdad $|\alpha_n|<\varepsilon/2$ (es posible hacerlo, puesto que la sucesión $\{\alpha_n\}$ es infinitesimal). Luego, escogemos un número $N\geqslant\overline{N}$ de tal modo

que para $n \geqslant \overline{N}$ se cumpla la desigualdad $\left|\frac{x_{\overline{N}} - ay_{\overline{N}}}{y_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Es posible escoger el número N de esta manera puesto que el número $x_{\overline{N}} - ay_{\overline{N}}$ está fijado, y la sucesión $\{y_n\}$ es infinita, por eso la sucesión $\left\{\frac{x_{\overline{N}} - ay_{\overline{N}}}{y_n}\right\}$ es infinitesimal. Sea ahora $n \geqslant N$. De la desigualdad (3.8) obtenemos

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{(y_{\overline{N}+1} - y_{\overline{N}}) + (y_{\overline{N}+2} - y_{\overline{N}+1}) + \ldots + (y_n - y_{n-1})}{y_n},$$

o bien

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{y_n - y_{\overline{N}}}{y_n}.$$

Ya que para $n \geqslant N$, $y_n - y_{\overline{N}} \leqslant y_n$ e $y_n > 0$, entonces $\frac{y_n - y_{\overline{N}}}{y_n} \leqslant 1$. Por eso, para $n \geqslant N$ de la última desigualdad obtenemos

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| < \varepsilon.$$

El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. *Si $\{y_n\}$ es sucesión infinita creciente y la sucesión $\left\{\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\}$ es también infinita y tiende al infinito de signo definido, entonces la sucesión $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ es infinita.*

En efecto, sea

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A_n.$$

La sucesión $\{A_n\}$ es infinita. Tenemos, para $n \geqslant \overline{N}$.

$$x_{\overline{N}+1} - x_{\overline{N}} = A_{\overline{N}+1}\,(y_{\overline{N}+1} - y_{\overline{N}}),$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$x_n - x_{n-1} = A_n\,(y_n - y_{n-1}).$$

Sumando estas igualdades, hallamos

$$x_n - x_{\overline{N}} = A_{\overline{N}+1}\,(y_{\overline{N}+1} - y_{\overline{N}}) + \ldots + A_n\,(y_n - y_{n-1}).$$

De aquí,

$$\left|\frac{x_n}{x_n}\right| = \frac{A_{\overline{N}+1}\,(y_{\overline{N}+1} - y_{\overline{N}}) + \ldots + A_n\,(y_n - y_{n-1})}{y_n} + \frac{x_{\overline{N}}}{y_n}.$$

De esta relación obtenemos

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| \geqslant \left|\frac{A_{\overline{N}+1}\,(y_{\overline{N}+1} - y_{\overline{N}}) + \ldots + A_n\,(y_n - y_{n-1})}{y_n}\right| - \left|\frac{x_{\overline{N}}}{y_n}\right|. \qquad (3.9)$$

Para mayor precisión consideremos que, para $n \geqslant \overline{N}$, los elementos de las sucesiones $\{y_n\}$ y $\{A_n\}$ son positivos. Luego, según el A positivo dado escogemos un

número $\bar{N}$ de tal modo que para $n \geqslant \bar{N}$ se cumpla la desigualdad $A_n > 4A$, después un $N \geqslant \bar{N}$ tal que para $n \geqslant N$

$$\left|\frac{x_{\bar{N}}}{y_n}\right| < A, \quad \frac{y_{\bar{N}}}{y_n} < \frac{1}{2}.$$

La posibilidad para escoger este N se garantiza porque las sucesiones $\{A_n\}$ e $\{y_n\}$ son infinitas y, a partir de cierto número, sus términos son positivos. Es obvio que para $n \geqslant N$ de la desigualdad (3.9) obtenemos

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > 4A\,\frac{(y_{\bar{N}+1}-y_{\bar{N}})+\ldots+(y_n-y_{n-1})}{y_n}-\left|\frac{x_{\bar{N}}}{y_n}\right|$$

o bien

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > 4A\left(1-\frac{y_{\bar{N}}}{y_n}\right)-A > A.$$

De este modo, la sucesión $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ es infinita.

Consideremos varios ejemplos.

1°. Demostremos que si la sucesión $\{a_n\}$ converge y tiene el límite a, entonces la sucesión $\left\{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right\}$ de valores aritméticos medios de los elementos de la sucesión $\{a\}$ converge a este mismo límite a *). En efecto, si ponemos $a_1+a_2+\ldots+a_n=x_n$ e $y_n=n$, entonces $\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a_n$. Ya que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ existe, entonces, según el teorema de Schtolz,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

2°. Consideremos ahora la sucesión $\{a_n\}$, donde

$$a_n=\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}$$

y k es un número positivo entero.

Denotemos $1^k+2^k+\ldots+n^k$ por x_n y n^{k+1}, por y_n. Entonces, la sucesión $\{a_n\}$ toma la forma $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$. Investiguemos la convergencia de la sucesión $\left\{\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\right\}$. Tenemos

$$\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\frac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}=\frac{n^k}{(k+1)\,n^k-\frac{(k+1)\,k}{2}\,n^{k-1}+\ldots+(-1)^{k+1}}.$$

Dividiendo el numerador y el denominador de la última expresión por n, obtenemos

$$\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\frac{1}{k+1+\frac{1}{n}[\ldots]},$$

*) Esta proporción fue demostrada por Cauchy.

donde en el denominador entre corchetes está omitida la expresión cuyo límite es igual a $\left[-\frac{(k+1)\,k}{2}\right]$, para $n\to\infty$. De la última fórmula hallamos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\frac{1}{k+1}.$$

Por consiguiente, según el teorema de Schtolz, tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}.$$

3°. En fin, consideremos la sucesión $\left\{\frac{a^n}{n}\right\}$, $a>1$. Haciendo $a^n=x_n$ y $n=y_n$ y examinando la sucesión $\left\{\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\right\}$, hallamos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}(a^n-a^{n-1})=\lim_{n\to\infty}a^n\left(1-\frac{1}{a}\right)=+\infty.$$

Por eso, en virtud de la observación del teorema de Schtolz, tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n}=+\infty.$$

Complemento 2

La velocidad de convergencia de la sucesión

En el p. 3 del § 3 hemos demostrado que el límite de la sucesión $\{x_n\}$ determinada por la fórmula recurrente

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right),\quad n=1,\ 2,\ \ldots, \tag{9.10}$$

es igual a $\sqrt{a}$ donde $a>0$ y x_1 es cualquier número positivo. Como valor aproximado de $\sqrt{a}$ podemos tomar cualquier elemento x_{n+1} de la sucesión (3.10). Naturalmente, al mismo tiempo hay que aclarar cómo se elige el número n de las iteraciones *) que garantizan la aproximación de $\sqrt{a}$ con error dado.

Examinemos la sucesión $\{x_n\}$ determinada por la fórmula recurrente (3.10). El elemento x_n de esta sucesión se denominará *n-ésima aproximación de número* $\gamma=\sqrt{a}$. La magnitud

$$\varepsilon_n=\frac{x_n-\gamma}{\gamma} \tag{3.11}$$

se denominará *error relativo* de la n-ésima aproximación.

Es válida la siguiente *afirmación* para estimar el error relativo ε_{n+1} utilizando el error relativo ε_1 de la primera aproximación.

Sea x_1 elegido de tal modo que $|\varepsilon_1|<1/2$. Entonces, para cualquier $n\geqslant 1$, tienen lugar las desigualdades

$$0\leqslant\varepsilon_{n+1}\leqslant\varepsilon_1^{2^n}. \tag{3.12}$$

---

*) La *iteración* (del lat. *iteratio*, repetición) es el resultado de aplicación reiterada de alguna operación matemática. En el caso considerado, una iteración es el cálculo de x_{n+1} empleando x_n y la fórmula recurrente (3.10).

DEMOSTRACIÓN. De la fórmula (3.11) tenemos

$$x_n = \gamma(1 + \varepsilon_n). \tag{3.13}$$

Empleando las fórmulas (3.10) y (3.13) y la igualdad $(a/\gamma) = \gamma$, obtenemos

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left[\gamma(1+\varepsilon_n) + \frac{a}{\gamma(1+\varepsilon_n)}\right] = \gamma\left[1 + \frac{\varepsilon_n^2}{2(1+\varepsilon_n)}\right].$$

Puesto que $x_{n+1} = \gamma(1+\varepsilon_{n+1})$, es obvio que

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2(1+\varepsilon_n)}\varepsilon_n^2. \tag{3.14}$$

Por la condición, $|\varepsilon_1| < 1/2$. De aquí se desprenden las desigualdades $0 < \frac{1}{2(1+\varepsilon_1)} < 1$. Pero entonces, para $n = 1$, de (3.14) se deduce la desigualdad $\varepsilon_2 \geqslant 0$. Luego, empleando la relación (3.14) para $n = 2, 3, \ldots$, nos cercioramos de que ε_{n+1} es no negativo para cualquier $n \geqslant 1$.

Utilizando la igualdad (3.14), las relaciones $0 < \frac{1}{2(1+\varepsilon_1)} < 1$ y la condición de que ε_n es no negativo para cualquier $n > 1$, obtenemos la desigualdad $\varepsilon_{n+1} \leqslant \varepsilon_n^2$ para todo $n \geqslant 1$. De aquí se deduce directamente la desigualdad derecha de las (3.12). La afirmación queda demostrada.

Basándose en las desigualdades (3.12), determinamos que después de n iteraciones, el error relativo ε_{n+1} del cálculo de $\sqrt{a}$ se estima empleando el error relativo ε_1 de la primera aproximación x_1 y el número n de las iteraciones. Más adelante nos convenceremos de que, para $a > 1$ *), se puede escoger la primera aproximación x_1 de tal modo que el valor absoluto de ε_1 no supere 0,05. Es evidente que escogiendo de este modo x_1 el error relativo ε_1 satisfará las condiciones de la afirmación demostrada. Está claro también que de esta manera se resolverá el problema de elegir el número n de iteraciones que garantice la aproximación a $\sqrt{a}$ con error relativo dado ε: *este número n puede hallarse de la fórmula* **)

$$(0{,}05)^{2^n} < \varepsilon. \tag{3.15}$$

Así pues, sea $a > 1$. Representemos el número a en forma siguiente:

$$a = 2^{2k+l}M, \tag{3.16}$$

donde k es número no negativo entero, el número l es igual a cero o a la unidad, y el número M satisface las condiciones

$$1 \leqslant M < 2. \tag{3.17}$$

Notemos que la representación del número a en la forma (3.16) es la única. Escogemos x_1 de la manera siguiente:

$$x_1 = 2^k\left(\frac{1}{3}2^l M + \frac{17}{24}\right). \tag{3.18}$$

Vamos a convencernos de que *para cualquier M* que satisface las condiciones (3.17), la primera aproximación x_1 calculada por la fórmula (3.18) la primera aproximación x_1 calculada por la fórmula (3.18) da el error relativo ε_1 que no supera, en valor absoluto, el número 0,05 si se calcula $\gamma = \sqrt{a}$.

*) Si $a < 1$, entonces $a = 1/b$, donde $b > 1$, y $\sqrt{a}$ es igual a $1/\sqrt{b}$.

**) La validez de esta fórmula se desprende directamente de las relaciones (3.12).

Para demostrarlo vamos a utilizar la expresión exacta del error relativo $\varepsilon_1 = \frac{x_1 - \gamma}{\gamma}$. Ya que, según (3.16), $\gamma = 2^k\sqrt{2^i M}$, entonces de la expresión de ε_1 y la fórmula (3.18) obtenemos

$$\varepsilon_1 = \frac{\frac{1}{3}2^i M + \frac{17}{24} - \sqrt{2^i M}}{\sqrt{2^i M}}. \tag{3.19}$$

Puesto que el número i es igual a cero o a la unidad, y $M \geqslant 1$, tenemos $\sqrt{2^i M} \geqslant 1$. De aquí y de (3.19) se desprende la desigualdad

$$|\varepsilon_1| \leqslant \left|\frac{1}{3}2^i M + \frac{17}{24} - \sqrt{2^i M}\right|. \tag{3.20}$$

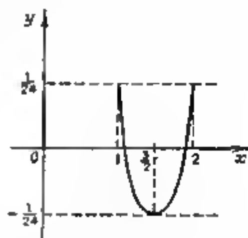


Fig. 3.4

Denotemos $\sqrt{2^i M}$ mediante X. Ya que $1 \leqslant M < 2$ e i es igual a cero o a la unidad, entonces todos los valores admisibles de X están ciertamente en el segmento [1, 2]:

$$1 \leqslant X \leqslant 2 \tag{3.21}$$

Empleando la denotación introducida X para $\sqrt{2^i M}$, escribimos la desigualdad (3.20) en la siguiente forma:

$$|\varepsilon_1| \leqslant \left|\frac{1}{3}X^2 - X + \frac{17}{24}\right|. \tag{3.22}$$

En virtud de (3.22), el valor máximo de $|\varepsilon_1|$ no supera el valor de $\left|\frac{1}{3}X^2 - X + \frac{17}{24}\right|$ para los valores de X que satisfacen las condiciones (3.21). Para aclarar el problema de este valor máximo examinemos la gráfica de la función $f(X) = \frac{1}{3}X^2 - X + \frac{17}{24}$. Sabemos de las matemáticas elementales que la gráfica de esta función es parábola que tiene vértice en el punto $X = 3/2$ (fig. 3.4) *). Como $f(1) = f(2) = 1/24$, y $f(3/2) = -1/24$, está claro que para los valores de X que satisfacen las condiciones (3.21), los valores de $f(X)$ están contenidos entre $-1/24$ y $1/24$. En otras palabras,

$$|f(X)| = \left|\frac{1}{3}X^2 - X + \frac{17}{24}\right| \leqslant \frac{1}{24}.$$

De la última desigualdad y de la (3.22) se desprende la desigualdad para ε_1, que nos interesa

$$|\varepsilon_1| \leqslant \frac{1}{24} < 0{,}05.$$

OBSERVACIÓN. Notemos que si el error relativo dado ε es igual a 10^{-10}, entonces para calcular con esta precisión la raíz cuadrada de *cualquier número* $a > 1$, después de elegir x_1 por la fórmula (3.18), se necesitan sólo *tres iteraciones* ($n = 3$), puesto que $(0{,}05)^{2^3} < 10^{-10}$.

---

*) En la fig. 3.4. la escala del eje Oy es 20 veces mayor que la escala del eje Ox.

Capítulo 4

CONCEPTO DE FUNCIÓN. VALOR LÍMITE DE LA FUNCIÓN. CONTINUIDAD

Comencemos este capítulo precisando el concepto más importante del análisis matemático, concepto de función. Basándose en el concepto de límite de una sucesión numérica, introducimos una nueva forma de operación del paso al límite que se fundamenta en el concepto de valor límite (o límite) de la función. En el presente capítulo se introduce también otro concepto matemático importante de continuidad de la función.

En el capítulo se presta especial atención para aclarar las propiedades de la continuidad y otras propiedades de las funciones elementales más simples.

El cálculo aproximado de los valores de funciones elementales se considera en el complemento del capítulo 8.

§ 1. Concepto de función

1. Magnitud variable y función. En el cap. 1 ya hemos notado que al menos dos magnitudes variables, cuya variación es mutuamente condicionada, están vinculados con todo proceso físico real.

Considerando magnitudes variables físicas reales llegamos a la conclusión de que estas magnitudes no siempre pueden tomar valores arbitrarios. Así, la temperatura de un cuerpo no puede ser menor que -273 °C, la velocidad de un punto material no puede ser mayor que $3\cdot 10^{10}$ cm/s (es decir, que la velocidad de la luz en el vacío), el desplazamiento de un punto material que realiza oscilaciones armónicas según la ley $y = A$ sen $(\omega t + \delta)$, puede variarse sólo entre los límites del segmento $[-A, +A]$.

En las matemáticas se abstraen de las propiedades físicas concretas de magnitudes variables que se observan en la naturaleza y se consideran magnitudes variables abstractas *) que se caracterizan solamente por valores numéricos que pueden tomar.

El conjunto $\{x\}$ de todos los valores que puede tomar la magnitud variable dada, se denomina *campo de variación* de esta magnitud variable. Una magnitud variable se considera dada si está prefijado el campo de su variación. Más adelante denotaremos magnitudes variables normalmente, con letras latinas minúsculas x, y, u, . . . y

---

*) Es conveniente notar que el concepto de magnitud se refiere a los conceptos matemáticos *iniciales* (véase la nota en la pág. 12).

los campos de variación de sus variables, con los símbolos $\{x\}$, $\{y\}$, $\{u\}$, . . .

Sea dada la magnitud variable x cuyo campo de variación es un conjunto $\{x\}$.

Si a todo valor de la variable x del conjunto $\{x\}$ se le pone en correspondencia por una ley conocida, un número y, entonces, se dice que la función $y = y(x)$ o $y = f(x)$ está prefijada en el conjunto $\{x\}$.

La variable x se denomina *argumento* y el conjunto $\{x\}$, *campo de definición de la función* $y = f(x)$.

El número y que corresponde al valor dado del argumento x se denomina *valor particular de la función* en el punto x. El conjunto de

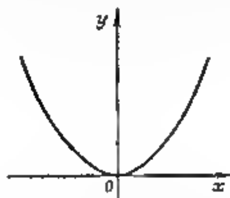


Fig. 4.1

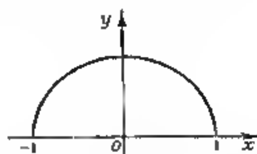


Fig. 4.2

todos los valores particulares de la función forma el conjunto bien determinado $\{y\}$ llamado *conjunto de todos los valores de la función.*

En la denotación $y = f(x)$ la letra f se denomina *característica* de la función. Para denotar el argumento, la función y sus características pueden emplearse diferentes letras.

Vamos a ofrecer algunos ejemplos de funciones:

1°. $y = x^2$. Esta función está prefijada sobre la recta infinita $-\infty < x < +\infty$. El conjunto de todos los valores de esta función es la semirrecta $0 \leqslant y < +\infty$ (fig. 4.1).

2°. $y = \sqrt{1 - x^2}$. La función está prefijada sobre el segmento $-1 \leqslant x \leqslant +1$. El conjunto de todos los valores de la función es el segmento $0 \leqslant y \leqslant 1$ (fig. 4.2).

3°. $y = n!$. Esta función está prefijada sobre el conjunto de los números naturales $n = 1, 2, \ldots$ El conjunto de todos los valores de tipo $n!$ (fig. 4.3).

4°. La función de Dirichlet *)

$$y = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es un número irracional,} \\ 1, & \text{si } x \text{ es un número racional.} \end{cases}$$

Esta función está prefijada sobre la recta infinita $-\infty < x < + \infty$ y el conjunto de todos sus valores comprende dos puntos

*) Peter Gustav Dirichlet, matemático alemán (1805—1859).

0 y 1.

5°.

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(El término sgn proviene de la palabra latina *signum*, signo). Esta función está prefijada sobre toda la recta infinita $-\infty < x < +\infty$, y el conjunto de todos sus valores comprende tres puntos: -1, 0 y $+1$ (fig. 4.4).



Fig. 4.3

6°. $y = [x]$, donde $[x]$ significa la parte entera del número real x, se lee "y es igual a la parte entera de x". Esta función está prefijada para todos los valores reales de x, y el conjunto de todos sus valores consta de números enteros (fig. 4.5).

2. Métodos de representación de la función. En este punto examinemos algunos métodos para representar la función.

Frecuentemente, la ley que establece la relación entre el argumento y la función, puede representarse por medio de fórmulas. Este método de expresar las funciones se denomina *analítico*. Vale subrayar que la función puede definirse por varias fórmulas en diferentes segmentos de su campo de definición.

Por ejemplo, la función

$$y = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & \text{si } x \leqslant 0, \\ x^2, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

está representada por el método analítico sobre toda la recta infinita (fig. 4.6).

Un método bastante difundido para representar la función es el *de tabla* que consiste en confeccionar la tabla de algunos valores del argumento y valores correspondientes de la función. En este caso se puede calcular aproximidamente los valores de la función. En este caso se puede calcular aproximadamente los valores de la función no comprendidos en la tabla y que corresponden a los valores intermedios del argumento. Para hacerlo, se emplea el método de interpolación que consiste en sustituir la función en los puntos que no

tienen valores de tabla por una función simple (por ejemplo, lineal o cuadrática). El horario de los trenes puede ser ejemplo del método de tabla para representar la función. El horario determina la posición del tren en ciertos momentos de tiempo. La interpolación permite calcular aproximadamente la posición del tren en cualquier momento intermedio de tiempo.

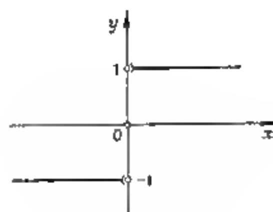


Fig. 4.4

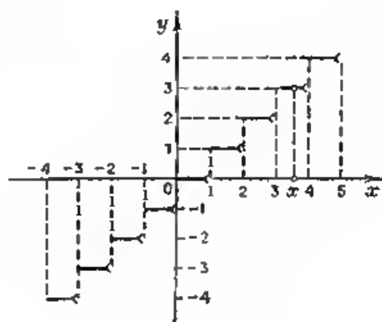


Fig. 4.5

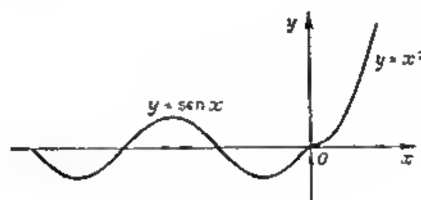


Fig. 4.6

En la práctica para mediciones físicas se usa otro método, el *gráfico*, en el cual la correspondencia entre el argumento y la función se representa por medio de la gráfica (que aparece, por ejemplo, en el oscilógrafo).

§ 2. Concepto de valor límite de una función

1. Definición del valor límite de una función. Consideremos la función $y = f(x)$ definida sobre un conjunto $\{x\}$ y un punto a, que tal vez no pertenezca al conjunto $\{x\}$ y que posee la propiedad de tener, en cualquier ε-entorno del punto a, puntos del conjunto

$\{x\}$, diferentes de a. Por ejemplo, el punto a puede ser punto de frontera del intervalo sobre el cual está definida la función.

Definición 1. *El número b se denomina valor límite de la función $y = f(x)$ en el punto $x = a$ (o bien límite de la función cuando $x \to a$) si para cualquier sucesión convergente a a $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ de valores del argumento x, los elementos x_n de la cual son diferentes de a* *) *($x_n \neq a$), la sucesión correspondiente $f(x_1), f(x_2) \ldots, f(x_n), \ldots$ de valores de la función converge a b.*

Para denotar el valor límite de la función se emplean los símbolos siguientes: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Notemos que, *en el punto a, la función $y = f(x)$ puede tener sólo un valor límite.* Esto se desprende del hecho de que la sucesión $\{f(x_n)\}$ puede tener sólo un límite.

Consideremos varios ejemplos.

1°. La función $f(x) = c$ tiene valor límite en todo punto a de la recta infinita. En efecto, si $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ es cualquier sucesión convergente a a de valores del argumento entonces la sucesión correspondiente de valores de la función tiene la forma $c, c, \ldots, \ldots, c, \ldots$ y, por eso, converge a c. De este modo, el valor límite de esta función es igual a c en todo punto $x = a$.

2°. En cualquier punto a de la recta infinita el valor límite de la función $f(x) = x$ es igual a a. En efecto, en este caso las sucesiones de valores del argumento y de la función son idénticos, y, por eso, si la sucesión $\{x_n\}$ converge a a, la sucesión $\{f(x_n)\}$ también converge a a.

3°. La función de Dirichlet, cuyos valores son iguales a uno en los puntos racionales y a cero, en los irracionales, no tiene valor límite en ningún punto a de la recta infinita. En efecto, para la sucesión convergente a a de valores racionales del argumento, el límite de la sucesión correspondiente de valores de la función es igual a la unidad mientras que para la sucesión de valores irracionales del argumento, convergente a a, el límite de la sucesión correspondiente de valores de la función es igual a cero.

A continuación vamos a emplear los conceptos de valores límite unilaterales de la función.

Consideremos que para cualquier $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{x\}$ sobre el cual está prefijada la función $f(x)$ tiene, por lo menos, un elemento situado en el intervalo $(a, a + \varepsilon)$ (respectivamente, en el intervalo $(a - \varepsilon, a)$).

Definición 2. *El número b se denomina* ***valor límite derecho (izquierdo)*** *de la función $f(x)$ en el punto $x = a$, si para cualquier sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de valores del argumento x, que converge a a y*

*) En particular, este requerimiento puede explicarse por el hecho de que la función $f(x)$ puede ser indefinida en el punto a.

tiene elementos x_n superiores (inferiores) a a, la sucesión correspondiente $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ de valores de la función converge a b.

Para el valor límite derecho de la función se usa la denotación

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b \text{ o bien } f(a+0) = b.$$

Para el valor límite izquierdo se usa la denotación

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b \text{ o bien } f(a-0) = b.$$

Como ejemplo consideremos la función $f(x) = \operatorname{sgn} x$*). En el cero esta función tiene valores límite derecho e izquierdo con tal que $\operatorname{sgn}(0+0) = 1$ y $\operatorname{sgn}(0-0) = -1$. En efecto, si $\{x_n\}$ es cualquier sucesión de valores del argumento de esta función y converge a cero, y los elementos x_n de esta sucesión son mayores de cero ($x_n > 0$), entonces $\operatorname{sgn} x_n = 1$ y por eso $\lim_{n \to \infty} \operatorname{sgn} x_n = 1$. De este modo, la validez de la igualdad $\operatorname{sgn}(0+0) = 1$ queda demostrada. De manera análoga se demuestra que $\operatorname{sgn}(0-0) = -1$.

OBSERVACIÓN. *Si en el punto a los valores límite derecho e izquierdo de la función $f(x)$ son iguales, entonces en el punto a existe el valor límite de esta función igual a dichos valores unilaterales.* Demostremos este hecho evidente.

Sea $\{x_n\}$ cualquier sucesión de valores del argumento de la función $f(x)$ que converge a a y tiene elementos no iguales a a. Sea $\{x_{k_m}\}$ una subsucesión de esta sucesión, compuesta de todos los elementos de la sucesión $\{x_n\}$ mayores de a, y sea $\{x_{l_m}\}$ una subsucesión compuesta de todos los elementos de la sucesión $\{x_n\}$ menores de a **). Puesto que en virtud del p. 1 del § 4 del cap. 3, las subsucesiones $\{x_{k_m}\}$ y $\{x_{l_m}\}$ convergen hacia a, entonces de la existencias de los valores límite derecho e izquierdo de la función $f(x)$ en el punto a se deduce que las sucesiones $\{f(x_{k_m})\}$ y $\{f(x_{l_m})\}$ tienen límites que son iguales de acuerdo con la condición. Sea b el límite de estas sucesiones. Para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede indicar un número N, tal que todos los elementos de las sucesiones $\{f(x_{k_m})\}$ y $\{f(x_{l_m})\}$ para los cuales $k_m \geqslant N$ y $l_m \geqslant N$, satisfacen las desigualdades $|f(x_{k_m}) - b| < \varepsilon$ y $|f(x_{l_m}) - b| < \varepsilon$. Por consiguiente, cuando $n \geqslant N$ se cumple la desigualdad $|f(x_n) - b| < \varepsilon$, es decir, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge hacia b. Por lo tanto, queda demostrado que el valor límite de la función $f(x)$ en el punto a existe y es igual a b.

---

*) La definición de la función $y = \operatorname{sgn} x$ se da en el p. 1 del § 1.

**) Excluimos de la consideración el caso cuando la sucesión $\{x_n\}$ tiene *sólo un número finito de elementos* situados a la derecha (izquierda) del punto a. En este caso la convergencia de $\{f(x_n)\}$ es evidente.

Enunciemos las definiciones del valor límite de la función cuando el argumento x tiende al infinito y al infinito de signo definido.

Consideremos que para cualquier $A > 0$ el conjunto $\{x\}$ sobre el cual está prefijada la función $f(x)$, tiene al menos un elemento situado fuera del segmento $[-A, +A]$.

Definición 3. *El número b se denomina* ***valor límite de la función*** *$f(x)$ cuando $x \to \infty$ (o* ***límite de la función cuando*** *$x \to \infty$) si, para cualquier sucesión infinita de valores del argumento, la sucesión correspondiente de valores de la función converge a b.*

Para denotar el valor límite de la función, cuando $x \to \infty$, se emplean los símbolos siguientes:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b.$$

Por fin, consideremos que, para cualquier $A > 0$ el conjunto $\{x\}$ sobre el cual está prefijada la función $f(x)$ tiene al menos un elemento x que satisface la condición $x > A$ $(x < -A)$.

Definición 4. *El número b se denomina valor límite de la función $f(x)$ cuando el argumento x tiende al infinito positivo (negativo) si para cualquier sucesión infinita de valores del argumento, cuyos elementos son positivos (negativos) partiendo de un número, la sucesión correspondiente de valores de la función converge a b.*

Las denotaciones simbólicas son:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \right).$$

Como ejemplo consideremos la función $f(x) = 1/x$. Esta función tiene el valor límite igual a cero, cuando $x \to \infty$. Efectivamente, si $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ es sucesión infinita de valores del argumento, entonces la sucesión $1/x_1, 1/x_2, \ldots, 1/x_n, \ldots$ es infinitesimal y por eso tiene límite igual a cero.

2. Operaciones aritméticas sobre las funciones que tienen valor límite. Vamos a convencernos de que las operaciones aritméticas sobre las funciones que tienen valor límite en el punto a llevan a las funciones que también tienen valor límite en este punto. Es válido el siguiente teorema fundamental.

Teorema 4.1. *Sea que las funciones $f(x)$ y $g(x)$, prefijadas sobre un mismo conjunto, tienen los valores límite b y c en el punto a. Entonces las funciones $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ y $\frac{f(x)}{g(x)}$ tienen en el punto a los valores límite (para el cociente debe cumplirse la condición $c \neq 0$) iguales a $b + c$, $b - c$, $b \cdot c$ y $\frac{b}{c}$, respectivamente.*

DEMOSTRACION. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ $(x_n \neq a)$ sucesión arbitraria, convergente a a, de valores del argumento de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Las sucesiones correspondientes $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ y $g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_n), \ldots$ de valores de estas

funciones tienen límites b y c. Pero entonces, conforme a los teoremas 3.9—3.12, las sucesiones $\{f(x_n)+g(x_n)\}$, $\{f(x_n)-g(x_n)\}$, $\{f(x_n)\cdot g(x_n)\}$ y $\left\{\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\}$ tienen límites iguales a $b+c$, $b-c$, $b\cdot c$ y $\frac{b}{c}$, respectivamente. En virtud de la arbitrariedad de la sucesión $\{x_n\}$, esto significa que $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=b+c$, $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=b-c$, $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=b\cdot c$, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b}{c}$. El teorema queda demostrado.

Apliquemos el teorema demostrado para hallar los valores límite de los polinomios y las fracciones algebraicas irreducibles *). Tiene lugar la siguiente afirmación.

En todo punto a de la recta infinita los valores límite de los polinomios y las fracciones algebraicas irreducibles existen y son iguales a los valores particulares de estas funciones en dicho punto (en caso de la fracción algebraica, a no debe ser la raíz del denominador).

Efectivamente, en virtud del teorema 4.1,

$$\lim_{x\to a}x^2=\lim_{x\to a}x\cdot x=\lim_{x\to a}x\cdot\lim_{x\to a}x=a^2.$$

Análogamente, podemos convencernos de que

$$\lim_{x\to a}x^n=a^n.$$

Por consiguiente, para el polinomio $b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n$ obtenemos (empleando el teorema 4.1 para el producto y la suma)

$$\lim_{x\to a}(b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n)=$$
$$=b_0a^n+b_1a^{n-1}+\ldots+b_{n-1}a+b_n.$$

En caso de la fracción algebraica irreducible, si a no es raíz del denominador, obtenemos (aplicando el teorema 4.1 para el cociente)

$$\lim_{x\to a}\frac{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n}{c_0x^m+c_1x^{m-1}+\ldots+c_{m-1}x+c_m}=\frac{b_0a^n+b_1a^{n-1}+\ldots+b_{n-1}a+b_n}{c_0a^m+c_1a^{m-1}+\ldots+c_{m-1}a+c_m}.$$

3. Comparación de funciones infinitesimales e infinitas. La *función $y=f(x)$ se denomina infinitesimal en el punto $x=a$ (cuando $x\to a$) si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$.* Por ejemplo, es fácil convencerse de que la función $f(x)=(x-a)^m$) es infinitesimal en el punto $x=a$, siendo m un número positivo entero. Efectivamente, en el punto anterior hemos demostrado que, en cualquier punto de la recta infinita, el valor

*) La fracción algebraica irreducible es el cociente de dos polinomios que no tiene factores comunes diferentes de la constante.

límite del polinomio $f(x) = (x - a)^m$ existe y es igual al valor particular del polinomio en este punto. Por eso, $\lim\limits_{x \to a} (x - a)^m = 0$.

Notemos que *si la función $y = f(x)$ tiene el valor límite igual a b en el punto a, entonces la función $\alpha(x) = f(x) - b$ es infinitesimal en el punto a.* En efecto, los valores límite de cada una de las funciones $f(x)$ y b son iguales a b en el punto a, y, por eso, en virtud del teorema 4.1,

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = \lim_{x \to a} (f(x) - b) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} b = 0.$$

Empleando el resultado obtenido, obtenemos una representación especial de la función que tiene el valor límite igual a b en el punto $x = a$:

$$f(x) = b + \alpha(x), \quad \text{donde} \quad \lim_{x \to a} \alpha(x) = 0. \qquad (4.1)$$

La representación (4.1) resulta ser muy cómoda para demostrar distintas proposiciones. A continuación vamos a emplearla muchas veces.

A la par con el concepto de la función infinitesimal se usa frecuentemente el concepto de función, infinita por la derecha en el punto a o por la izquierda en el punto a. A saber, *la función $f(x)$ se denomina infinita por la derecha (por la izquierda) en el punto a si para cualquier sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ convergente a a de valores del argumento x, cuyos elementos x_n son superiores a a (inferiores a a), la sucesión correspondiente $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n) \ldots$ de valores de la función es sucesión infinita de signo definido.*

Para las funciones infinitas se usan las denotaciones siguientes:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = +\infty \quad \text{o} \quad f(a+0) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to a-0} f(x) = +\infty \quad \text{o} \quad f(a-0) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to a+0} f(x) = -\infty \quad \text{o} \quad f(a+0) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to a-0} f(x) = -\infty \quad \text{o} \quad f(a-0) = -\infty.$$

Vamos a familiarizarnos con los métodos de comparar funciones infinitesimales y los términos usados.

Sean $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ dos funciones prefijadas sobre un mismo conjunto e infinitesimales en el punto $x = a$.

1) La función $\alpha(x)$ se denomina *infinitesimal de orden superior que* $\beta(x)$ (tiene orden superior de pequeñez) si el valor límite de la función $\alpha(x)/\beta(x)$ es igual a cero en el punto a.

2) Las funciones $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ se denominan *infinitesimales de un mismo orden* (tienen un mismo orden de pequeñez) si el valor límite de la función $\alpha(x)/\beta(x)$ en el punto a existe y es diferente de cero.

3) Las funciones $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ se denominan *infinitesimales equivalentes* si el valor límite de la función $\alpha(x)/\beta(x)$ en el punto a es igual a uno.

Frecuentemente las funciones infinitesimales se comparan con algunas funciones infinitesimales estándar. Como la función de comparación se suele tomar la función $(x-a)^m$ dondo m es número positivo entero. En este caso, se emplean los términos siguientes: la función $\alpha(x)$ infinitesimal en el punto a tiene *orden de pequeñez* m si el valor límite de la función $\alpha(x)/(x-a)^m$, en el punto a, es diferente de cero.

Para comparar funciones infinitesimales suele usarse el símbolo o (o minúscula). A saber, si la función $\alpha=\alpha(x)$ es función infinitesimal en el punto a de orden superior que la función $\beta=\beta(x)$, infinitesimal en el mismo punto, entonces se escribe convencionalmente del modo siguiente:

$$\alpha = o(\beta)$$

(se lee «α es o minúscula de β»). De esta manera, el símbolo $o(\beta)$ significa *cualquier* función infinitesimal que en el punto a tiene orden de pequeñez superior que la función $\beta=\beta(x)$ infinitesimal en el mismo punto

Notemos las siguientes propiedades evidentes del símbolo o: si $\gamma=o(\beta)$, entonces $o(\beta)\pm o(\gamma)=o(\beta)$, $o(\beta)\pm o(\beta)=o(\beta)$.

Observemos también que si α y β son funciones infinitesimales en el punto a, entonces la función $\alpha\beta$ tiene orden de pequeñez superior que cada uno de los factores, y por eso

$$\alpha\beta = o(\alpha), \quad \alpha\beta = o(\beta)$$

Para las funciones infinitas a la derecha (o a la izquierda) del punto a se usan los métodos análogos de comparación.

Sean $A(x)$ y $B(x)$ funciones infinitas a la derecha del punto a y sean, por ejemplo, las dos de signo positivo, es decir,

$$\lim_{x\to a+0} A(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a+0} B(x) = +\infty.$$

Diremos que la función $A(x)$ tiene, a la derecha del punto a, *orden de crecimiento superior* que la función $B(x)$ si la función $\frac{A(x)}{B(x)}$ es infinita por la derecha en el punto a. Si el valor límite derecho de la función $\frac{A(x)}{B(x)}$ en el punto a es finito y diferente de cero, entonces, en este caso, diremos que $A(x)$ y $B(x)$ tienen a la derecha del punto a *un mismo orden de crecimiento*.

Consideremos algunos ejemplos.

1°. Las funciones $\alpha(x)=3x^2+x^3$ y $\beta(x)=2x^2$ son infinitesimales de un mismo orden en el punto $x=0$. En efecto, si $x\neq 0$,

$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x$. Ya que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}x=0$, en virtud del teorema 4.1, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\frac{3}{2}$. Esto significa que $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ son infinitesimales de un mismo orden.

2°. Las funciones $\alpha(x)=x^2-6x^3$ y $\beta(x)=x^2$ son infinitesimales equivalentes en el punto $x=0$. En efecto, $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1-6x$. Ya que $\lim\limits_{x\to 0}6x=0$, en virtud del teorema 4.1, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, lo que significa la equivalencia de las infinitesimales $\alpha(x)$ y $\beta(x)$.

3°. Las funciones $A(x)=\frac{1+x}{x}$ y $B(x)=\frac{1}{x}$ son de un mismo orden de crecimiento a la derecha y a la izquierda del punto $x=0$. Esto se desprende de que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{A(x)}{B(x)}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)=1$.

§ 3. Concepto de continuidad de una función

1. Definición de la continuidad de una función. Sea que el punto a pertenece al campo de definición de la función $f(x)$ y cualquier ε-entorno del punto a comprende puntos, diferentes de a, del campo de definición de esta función.

Definición 1. *La función $f(x)$ se denomina* ***continua*** *en el punto a si, en el punto a, el valor límite de esta función existe y es igual al valor particular $f(a)$.*

De este modo, la condición de continuidad de la función $f(x)$ en el punto a puede expresarse simbólicamente de modo siguiente:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Ya que $a=\lim\limits_{x\to a}x$, entonces la igualdad anterior puede tomar la forma siguiente:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f\left(\lim_{x\to a} x\right).$$

Por consiguiente, para la función continua, el símbolo «lím» del paso al límite y el «f» de la característica de la función pueden cambiarse de lugar.

Empleando la definición 1 del valor límite de la función $f(x)$ en el punto a (véase el p. 1 del § 2 en el presente capítulo) podemos parafrasear la definición 1 de la continuidad de la función en el punto a del modo siguiente.

Definición 1*. *La función $f(x)$ se denomina* ***continua*** *en el punto a si, para cualquier sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ convergente a a de valores del argumento x, la sucesión correspondiente $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ de valores de esta función converge al número $f(a)$.*

Observemos que, en comparación con la definición 1 del p. 1 en el § 2, del valor límite de $f(x)$ en el punto a, en la definición 1* hemos omitido la exigencia de que todos los elementos de la sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sean diferentes de a. Se puede hacerlo en virtud de que, después de añadir cualquier número de nuevos elementos iguales a $f(a)$ a los elementos de la sucesión $\{f(x_n)\}$ convergente a $f(a)$, no se infringe la convergencia hacia $f(a)$ de la sucesión obtenida.

Supongamos que el conjunto $\{x\}$, sobre el cual está prefijada la función $f(x)$, comprende el punto a y para cualquier $\varepsilon > 0$ existe al menos un elemento de este conjunto que se encuentra en el intervalo $(a, a+\varepsilon)$ (en el intervalo $(a-\varepsilon, a)$).

*Definición 2. La función $f(x)$ se denomina **continua por la derecha (por la izquierda)** en el punto a si el valor límite derecho (izquierdo) de esta función en el punto a existe y es igual al valor particular $f(a)$.*

Las denotaciones simbólicas de la continuidad por la derecha (por la izquierda) serán:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a) \quad \text{o} \quad f(a+0) = f(a)$$

$$\left(\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a) \quad \text{o} \quad f(a-0) = f(a)\right).$$

OBSERVACIÓN. *Si la función $f(x)$ es continua tanto por la izquierda como por la derecha en el punto a, entonces es continua en este punto.* Efectivamente, en virtud de la observación (p. 1 del § 2 de este capítulo), en este caso existe un valor límite de la función en el punto a que es igual al valor particular de esta función en el punto a.

Consideremos ejemplos.

1°. La función potencial $f(x) = x^n$ con el exponente positivo en números enteros n es continua en todo punto de la recta infinita. En efecto, en el p. 2 del § 2 hemos demostrado que el valor límite de esta función en cualquier punto de la recta infinita es igual al valor particular a^n.

2°. Debido a que los polinomios y las fracciones algebraicas irreducibles tienen, en todo punto de su campo de definición, el valor límite igual al valor particular (véase el p. 2 del § 2), entonces son funciones continuas.

Los puntos, en los cuales la función no posee la propiedad de continuidad, se denominan *puntos de discontinuidad* de la función *). Por ejemplo, la función $f(x) = \operatorname{sgn} x$ tiene discontinuidad en el punto $x = 0$ (en el p. 1 del § 2 hemos demostrado que los valores límite derecho e izquierdo de esta función en el punto $x = 0$ existen, pero no son iguales uno a otro y, por eso, en este punto no existe el valor límite de la función). La función de Dirichlet es discontinua en todo punto de la recta infinita, puesto que no tiene valor límite en ningún punto de esta recta (véase el p. 1 del § 2).

*) En el § 8 daremos la clasificación de los puntos de discontinuidad.

Diremos que la función $f(x)$ es *continua sobre el conjunto* $\{x\}$ si es continua en todo punto de este conjunto. Si la función es continua en todo punto de un intervalo, se dice que es continua sobre el intervalo. Si la función es continua en todo punto interior del segmento $[a, b]$ y, además, es continua por la derecha en el punto a y por la izquierda en el punto b, entonces se dice quo es continua sobre el segmento $[a, b]$.

2. Operaciones aritméticas sobre las funciones continuas. Vamos a convencernos de que las operaciones aritméticas sobre las funciones continuas llevan a funciones continuas.

Demostremos el siguiente teorema *fundamental*.

Teorema 4.2. *Sea que las funciones $f(x)$ y $g(x)$, prefijadas sobre un mismo conjunto, son continuas en el punto a. Entonces, las funciones $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ y $\frac{f(x)}{g(x)}$ son continuas en el punto a (para el cociente debe cumplirse la condición $g(a)\neq 0$).*

DEMOSTRACIÓN. Ya que las funciones $f(x)$ y $g(x)$, continuas en el punto a, tienen en este punto los valores límite $f(a)$ y $g(a)$, entonces, de acuerdo con el teorema 4.1, los valores límite de las funciones $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ y $\frac{f(x)}{g(x)}$ existen y son iguales a $f(a)+g(a)$, $f(a)-g(a)$, $f(a)\cdot g(a)$, $\frac{f(a)}{g(a)}$, respectivamente. Pero estos valores son precisamente iguales a los valores particulares de dichas funciones en el punto a. El teorema queda demostrado.

3. Función compuesta y su continuidad. Las funciones que se forman haciendo la superposición (es decir, la aplicación sucesiva) de dos o varias funciones se denominan *compuestas*.

Es suficiente definir la función compuesta formada por la superposición de dos funciones.

Sea la función $x=\varphi(t)$ prefijada sobre un conjunto $\{t\}$ y sea $\{x\}$ el conjunto de los valores de esta función.

Luego supongamos que sobre dicho conjunto $\{x\}$ está definida otra función $y=f(x)$. Entonces se dice que sobre el conjunto $\{t\}$ está prefijada la función compuesta

$$y=f(x), \text{ donde } x=\varphi(t),$$

o

$$y=f[\varphi(t)]=F(t).$$

Es válido el siguiente teorema *fundamental*.

Teorema 4.3. *Si la función $x=\varphi(t)$ es continua en el punto a, y la función $y=f(x)$ es continua en el punto correspondiente $b=\varphi(a)$, entonces la función compuesta $y=f[\varphi(t)]=F(t)$ es continua en el punto a.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{t_n\}$ sucesión arbitraria de valores del argumento de la función compuesta convergente a a. Debido a que la función $x = \varphi(t)$ es continua en el punto a, entonces (en virtud de la definición 1* del p. 1), la sucesión correspondiente de valores de esta función $x_n = \varphi(t_n)$ converge al valor particular de esta función en el punto a, es decir, al número $b = \varphi(a)$. Luego, puesto que la función $y = f(x)$ es continua en el punto $b = \varphi(a)$, y, para ella, dicha sucesión $\{x_n\}$ convergente a $b = \varphi(a)$ es sucesión de valores del argumento, (entonces, en virtud de la misma definición 1* del p.1) la sucesión correspondiente de valores de la función $f(x_n) = f[\varphi(t_n)] = F(t_n)$ converge al número $f(b) = f[\varphi(a)] = F(a)$.

Pues, obtenemos que, para cualquier sucesión $\{t_n\}$ de valores del argumento de la función compuesta convergente a a, la sucesión correspondiente de valores de la propia función compuesta $\{f[\varphi(t_n)]\} = \{F(t_n)\}$ converge al número $f[\varphi(a)] = F(a)$, que es valor particular de la función compuesta en el punto a. En virtud de la misma definición 1* del p. 1, esto significa que la función compuesta $f[\varphi(t)] = F(t)$ es continua en el punto a. El teorema queda demostrado.

§ 4. Algunas propiedades de las funciones monótonas

1. Definición y ejemplos de funciones monótonas.

Definición. *La función $y = f(x)$ se denomina **no decreciente (no creciente) sobre un conjunto** $\{x\}$ si para cualesquiera x_1 y x_2 de este conjunto que satisfacen la condición $x_1 < x_2$ es válida la desigualdad $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$.*

Las funciones no decrecientes y no crecientes se agrupan en una clase llamada *funciones monótonas*.

Si para cualesquiera x_1 y x_2 del conjunto $\{x\}$ que satisfacen la condición $x_1 < x_2$ es válida la desigualdad $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$, entonces la función $y = f(x)$ se denomina *creciente* (*decreciente*) sobre el conjunto $\{x\}$. Las funciones crecientes y decrecientes se denominan también *estrictamente monótonas*.

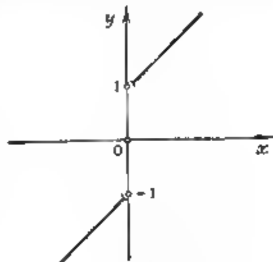


Fig. 4.7

Aducimos ejemplos de funciones monótonas.

1. La función $f(x) = x + \operatorname{sgn} x$ crece sobre toda la recta numérica (fig. 4.7).

2. La función $f(x) = \operatorname{sgn} x$ es no decreciente sobre toda la recta numérica (véase fig. 4.4).

2. Concepto de función inversa. Funciones monótonas que tienen la inversa. En este punto enunciamos el concepto de la función inversa y determinamos las condiciones de la existencia de la función inversa para la función monótona.

Sea la función $y = f(x)$ dada sobre el segmento $[a, b]$ y sea su campo de valores el segmento $[\alpha, \beta]$. Luego, sea que a todo y del segmento $[\alpha, \beta]$ le corresponde un solo valor x del segmento $[a, b]$, para el cual $f(x) = y$. Entonces, en el segmento $[\alpha, \beta]$ se puede definir la función $x = f^{-1}(y)$, poniendo en correspondencia a todo y de $[\alpha, \beta]$, el valor x de $[a, b]$ para el cual $f(x) = y$. La función $x = f^{-1}(y)$ se denomina inversa de la función $y = f(x)$.

En la definición mencionada *en vez de los segmentos* $[a, b]$ *y* $[\alpha, \beta]$ se podría considerar los *intervalos* (a, b) *y* (α, β). Se puede admitir también que uno o los dos intervalos (a, b) y (α, β) se convierten en una recta infinita o en una semirrecta abierta.

Notemos que si $x = f^{-1}(y)$ es la función inversa de $y = f(x)$, entonces la función $y = f(x)$ es obviamente inversa de la función $x = f^{-1}(y)$. Por eso las funciones $y = f(x)$ y $x = f^{-1}(y)$ se denominan también *mutuamente inversas.*

Las funciones mutuamente inversas poseen las siguientes propiedades evidentes:

$$f(f^{-1}(y)) = y, \quad f^{-1}(f(x)) = x.$$

Consideremos ejemplos de funciones mutuamente inversas.

1°. Sea que sobre el segmento $[0, 1]$ está dada la función $f(x) = 3x$. El conjunto de los valores de esta función será el segmento $[0, 3]$. La función $f^{-1}(y) = \frac{1}{3} y$ definida sobre el segmento $[0, 3]$ es inversa de la función dada $f(x) = 3x$.

2°. En el segmento $[0, 1]$ consideremos la función definida de la manera siguiente:

$$y = f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \text{ es número racional,} \\ 1 - x, & \text{si } x \text{ es número irracional.} \end{cases}$$

La función $x = f^{-1}(y)$ prefijada sobre el segmento $[0, 1]$ y definida por las igualdades

$$x = f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & \text{si } y \text{ es un número racional,} \\ 1 - y, & \text{si } y \text{ es un número irracional} \end{cases}$$

será inversa de la dada. No es difícil cerciorarse de eso comprobando directamente.

OBSERVACION 1. Sea que en el segmento $[a, b]$ está prefijada una función escrictamente monótona $y = f(x)$ y sea el segmento $[\alpha, \beta]$ su conjunto de valores. Entonces, de acuerdo con la monotonía estricta de la función $y = f(x)$, a todo y de $[\alpha, \beta]$ le corresponde *un solo*

valor x de $[a, b]$, para el cual $f(x) = y$, por eso en el segmento $[\alpha, \beta]$ existe la función $x = f^{-1}(y)$ inversa de la función $y = f(x)$. Más que eso, si la función $y = f(x)$ es creciente en el segmento $[a, b]$, entonces la función $x = f^{-1}(y)$ es también creciente en el segmento $[\alpha, \beta]$, si $y = f(x)$ es función decreciente en el segmento $[a, b]$ entonces $x = f^{-1}(y)$ decreciente en $[\beta, \alpha]$. Vamos a convencernos, por ejemplo, de que si $y = f(x)$ es función creciente, entonces $x = f^{-1}(y)$ es también creciente. Efectivamente, si $y_1 < y_2$, entonces $x_1 < x_2$ ($x_1 = f^{-1}(y_1)$ y $x_2 = f^{-1}(y_2)$), ya que de la desigualdad $x_1 \geqslant x_2$ y del crecimiento de la función $y = f(x)$ se deduciría que $y_1 \geqslant y_2$, lo que contradice la desigualdad $y_1 < y_2$.

Lema 1. Para que la función $y = f(x)$ estrictamente monotóna en el segmento $[a, b]$ sea continua en este segmento, es necesario y suficiente que cualquier número γ comprendido entre los números $\alpha = f(a)$ y $\beta = f(b)$ sea valor de esta función. En otras palabras, para que la función estrictamente monótona $y = f(x)$ sea continua en el segmento $[a, b]$ es necesario y suficiente que el conjunto de sus valores sea el segmento $[\alpha, \beta]$ (o $[\beta, \alpha]$, cuando $\beta < \alpha$), donde $\alpha = f(a)$ y $\beta = f(b)$.

DEMOSTRACION. 1) NECESIDAD. Para mayor precisión, consideremos la función creciente $y = f(x)$, continua en el segmento $[a, b]$ (para la función decreciente la demostración es análoga). Mostremos que si $\alpha < \gamma < \beta$, entonces existe un punto interior c del segmento $[a, b]$ en el que $f(c) = \gamma$ (en virtud del crecimiento de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ este punto c será único). Denotemos mediante $\{x\}$ el conjunto de puntos del segmento $[a, b]$, para los cuales $f(x) \leqslant \gamma$ este conjunto comprende, por ejemplo, el punto a, ya que $f(a) = a < \gamma$). El conjunto $\{x\}$ es superiormente acotado y, por eso, tiene la cota superior exacta c. Demostremos que $f(c) = \gamma$. Notemos que cualquier número del segmento $[a, b]$, inferior a c, pertenece al conjunto $\{x\}$ *) mientras que cualquier número superior a c no le pertenece **). Mostremos que c es punto interior del segmento $[a, b]$. En efecto, sea, por ejemplo, $c = b$. Consideremos una sucesión creciente $\{x_n\}$ de valores del argumento de la función $y = f(x)$ que converge hacia b. Ya que $f(x)$ es continua en el punto b por la izquierda, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \beta$. Por otra parte, $f(x_n) \leqslant \gamma$***), y, por eso, en virtud del teorema 3.13, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant \gamma$. De este modo, $\beta \leqslant \gamma$ que contradice la condicion $\gamma < \beta$. La contradicción obtenida demuestra que $c < b$. De manera análoga podemos cerciorarnos de que $a < c$. Puesto que c es punto interior del segmento $[a, b]$, existen

*) Ya que, según la definición de la cota superior exacta, para cualquier x menor de c existe un x' tal que $x < x'$ y $f(x') \leqslant \gamma$. Pero entonces del crecimiento de $f(x)$ se desprende que también $f(x) \leqslant \gamma$, es decir, x pertenece a $\{x\}$.

**) En virtud de la definición de la cota superior exacta.

***) Ya que todos los x_n son menores de c y, por tanto, pertenecen a $\{x\}$.

$\{x'_n\}$ y $\{x''_n\}$, sucesiones creciente y decreciente de valores del argumento x que convergen hacia c. Debido a que $f(x)$ es continua en el punto, c, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = f(c)$. Pero $f(x'_n) \leqslant \gamma$ y $f(x''_n) > \gamma$ *). Por eso, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) \leqslant \gamma$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) \geqslant \gamma$, de donde se desprende que $f(c) = \gamma$.

2) SUFICIENCIA. Realicemos la demostración para la función $y = f(x)$, creciente sobre el segmento $[a, b]$ (para la función decreciente los razonamientos son análogos). Sean c cualquier punto del segmento $[a, b]$ y $\gamma = f(c)$ el valor de la función $y = f(x)$ en este punto. Vamos a convencernos de que el número γ es valor límite derecho e izquierdo de la función $f(x)$ en el punto c (si c es punto de frontera del segmento $[a, b]$, entonces γ es valor límite unilateral correspondiente en este punto de frontera). Sea que $a < c \leqslant b$; demostremos que γ es valor límite izquierdo de la función en el punto c. Sea ε un número positivo tan pequeño que $\alpha < \gamma - \varepsilon$ (fig. 4.8). Ya que según la condición del lema el número $\gamma - \varepsilon$ es valor de la función $f(x)$, en el segmento $[a, b]$ se puede indicar un punto d tal que $f(d) = \gamma - \varepsilon$. Puesto que la función $f(x)$ crece, $d < c$. Consideremos ahora cualquier sucesión $\{x_n\}$ de valores del argumento x que converge hacia c y cuyos elementos son menores de c. A partir de cierto número N, todos los elementos x_n de esta sucesión satisfacen las desigualdades $d < x_n < c$ (un elemento de este tipo está representado en la fig. 4.8) así que, en virtud del crecimiento de $f(x)$ para $n \geqslant N$ son válidas las desigualdades $f(d) < f(x_n) < f(c)$. Como $f(d) = \gamma - \varepsilon$ y $f(c) = \gamma$, se desprende de las últimas desigualdades que para $n \geqslant N$

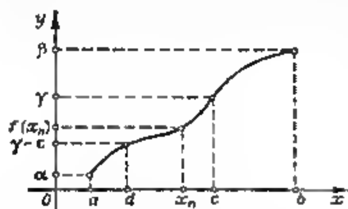


Fig. 4.8

$$0 < \gamma - f(x_n) < \varepsilon,$$

es decir, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge hacia γ. Ya que $\{x_n\}$ es sucesión arbitraria de valores del argumento que converge hacia c por la izquierda, por eso queda demostrado que en el punto c existe el valor límite izquierdo igual a $\gamma = f(c)$ **). Si $a \leqslant c < b$, entonces, realizando los razonamientos análogos, se puede demostrar que $\gamma =$

*) Hemos demostrado el caso de un $\varepsilon > 0$ tan pequeño que $\alpha < \gamma - \varepsilon$. Si $\alpha \geqslant \gamma - \varepsilon$, baste tomar $d = a$ y repetir los razonamientos realizados empleados, empleando la desigualdad evidente $\gamma - \varepsilon \leqslant f(d)$.

**) Debido a que $x'_n < c < x''_n$ para cualquier número n.

$= f(c)$ es el valor límite derecho de la función en el punto c. Hemos demostrado que los valores límite derecho e izquierdo de la función $y = f(x)$ en todo punto interior c son iguales a su valor particular $f(c)$ lo que, en virtud de la observación del p. 1 del § 2, significa la continuidad de $f(x)$ en los puntos interiores del segmento. La continuidad de esta función en los puntos de frontera del segmento se deduce de que los valores límite unilaterales correspondientes de $f(x)$ en los puntos de frontera del segmento son iguales a los valores particulares de la función. El lema queda completamente demostrado.

Corolario. *Sea que sobre el segmento* $[a, b]$ *está prefijada una función estrictamente monótona* $y = f(x)$ *y sea que* $\alpha = f(a)$ *y* $\beta = f(b)$. *Entonces esta función tiene la inversa* $x = f^{-1}(y)$, *estrictamente monótona y continua sobre el segmento* $[\alpha, \beta]$ (*o* $[\beta, \alpha]$ *si* $\beta < \alpha$).

DEMOSTRACIÓN. En virtud del lema que acabamos de demostrar, el conjunto de los valores de la función $y = f(x)$ es el segmento $[\alpha, \beta]$. Entonces, según la observación 1 de este punto, en el segmento $[\alpha, \beta]$ existe la función inversa $x = f^{-1}(y)$, estrictamente monótona, cuyo conjunto de valores es el segmento $[a, b]$ y que por eso, en virtud del mismo lema, es continua sobre el segmento $[\alpha, \beta]$.

OBSERVACIÓN 2. Notemos que las funciones monótonas tienen valores límite derecho e izquierdo en todo punto interior del campo de definición. La demostración de esta proposición queda a cargo del lector.

§ 5. Funciones elementales más simples

Suelen llamarse funciones elementales más simples las siguientes funciones: $y = x^{\alpha}$, $y = a^{x}$, $y = \log_a x$, $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \operatorname{arcsen} x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

El lector tiene ciertos conocimientos de estas funciones y sus gráficas de las matemáticas elementales. Algunas de estas funciones, por ejemplo, $y = a^{x}$, se definen fácilmente para los valores racionales del argumento x. Vamos a aclarar el problema de la definición de las funciones elementales más simples para todos los valores reales posibles de sus argumentos. Este problema no es sencillo: por ejemplo, no está claro cómo se puede elevar un número real arbitrario x a una potencia real arbitraria α.

Examinaremos también el problema de la continuidad de las funciones elementales más simples en todos los puntos de su campo de definición. Argumentaremos aquel comportamiento de las funciones elementales más simples que se desprende de la consideración de sus gráficas.

En el Complemento del cap. 8 se dan algoritmos para calcular valores de las funciones elementales más simples.

1. Potencias racionales de los números positivos. La elevación

de cualquier número real x a *una potencia positiva entera* n se define como la multiplicación n-tuple del número x por sí mismo. Por consiguiente, siendo n entero, podemos considerar definida la función $y = x^n$ para todos los números reales x. Vamos a utilizar algunas propiedades de esta función para definir potencias racionales de los números positivos.

Demostremos el lema siguiente.

Lema 2. *Para $x \geqslant 0$ y un n positivo entero, la función potencial $y = x^n$ crece y es continua.*

DEMOSTRACIÓN. Demostremos el crecimiento de esta función. Sea $0 \leqslant x_1 < x_2$. Como $x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \ldots + x_1^{n-1})$, $x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \ldots + x_1^{n-1} > 0$ se tiene $x_2^n > x_1^n$. La continuidad de esta función fue determinada anteriormente (véase el ejemplo 1 del p. 1 en el § 3).

Corolario. Consideremos la función potencial $y = x^n$ en el segmento $[0, N]$, donde N es número positivo cualquiera. Puesto que esta función es continua y creciente en dicho segmento, en virtud del corolario del lema 1 de este capítulo, ella tiene la función inversa creciente y continua en el segmento $[0, N^n]$ que se denotará por $y^{1/n}$.

Ya que se puede escoger N cualquier grande que sea, N^n también lo será. Por consiguiente, la función $x = y^{1/n}$ está definida para todos los valores no negativos de y. Cambiando para esta función la denotación del argumento y por x y la de la función x por y, obtenemos la función potencial $y = x^{1/n}$ definida para todos los valores no negativos de x.

Definimos $a^{1/n}$ como el número b igual al valor de la función $y = x^{1/n}$ en el punto a. Ahora podemos definir cualquier potencia racional r del número positivo a. A saber, si $r = m/n$, donde m y n son números positivos enteros, pongamos

$$a^r = a^{m/n} = (a^{1/n})^m.$$

Además nos ponemos de acuerdo que

$$a^0 = 1, \quad a^{-r} = (1/a)^r.$$

No es difícil cerciorarse de la validez de las siguientes propiedades de la potencia racional de los números positivos:

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}, \quad a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r, \quad a^r \cdot a^s = a^{r+s}. \qquad (*)$$

En primer lugar, demostremos la validez de la primera propiedad (*). Observemos que, para un p positivo entero, la igualdad $(a^{m/n})^p = a^{m \cdot p/n}$, donde m y n son cualesquiera números positivos enteros, es válida a ciencia cierta, puesto que tanto el miembro izquierdo como el derecho de esta igualdad son iguales al producto del número $a^{1/n}$ por sí mismo $m \cdot p$ veces.

Haciendo $r = \frac{m_1}{n_1}$, $s = \frac{m_2}{n_2}$, demostremos la igualdad $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$ para cualesquiera r y s racionales positivos. Pongamos $c_1 = \left(a^{\frac{m_1}{n_1}}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}$, $c_2 = a^{\frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}}$. Si

c_1 fuera distinto de c_2, entonces del crecimiento de la función potencial $y = x^{n_1}$ se desprendería que $c_2^{n_1} \neq c_1^{n_1}$, y, en virtud de la validez ya demostrada de la igualdad $(a^{m/n})^p = a^{m \cdot p/n}$ para p entero, la última relación significaría que $(a^{m_1/n_1})^{m_2} \neq a^{m_1 \cdot m_2/n_1}$. La relación obtenida contradice la igualdad $(a^{m_1/n_1})^{m_2} = a^{m_1 \cdot m_2/n_1}$ ya demostrada para m_1, n_1 y m_2 positivos enteros. Por lo tanto, $c_1 = c_2$ y la primera igualdad (*) queda demostrada para cualesquiera r y s racionales positivos.

No es difícil extender esta igualdad para r y s no positivos, puesto que nos hemos puesto de acuerdn que

$$a^0 = 1, \quad a^{-r} = \left(\frac{1}{a}\right)^r \text{ para } r > 0.$$

Es también suficiente demostrar la segunda igualdad (*) para un r racional *positivo*. Haciéndolo igual a m/n, donde m y n son números positivos enteros, observemos que baste demostrar la igualdad $a^{1/n} \cdot b^{1/n} = (a \cdot b)^{1/n}$, ya que, al multiplicar m igualdades de este tipo, quedará demostrada la relación general $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$.

Para demostrar la igualdad $a^{1/n} \cdot b^{1/n} = (a \cdot b)^{1/n}$, observamos que, en virtud de las propiedades de funciones inversas mutuamente $y = x^{1/n}$ y $x = y^n$, se puede afirmar que $(b^{1/n})^n = b$, $(a^{1/n})^n = a$, $((a \cdot b)^{1/n})^n = a \cdot b$. Por eso, haciendo $c_1 = a^{1/n} \cdot b^{1/n}$, $c_2 = (a \cdot b)^{1/n}$ y suponiendo que $c_1 \neq c_2$, obtendríamos que $c_1^n \neq c_2^n$ lo que contradice la igualdad $a \cdot b = ab$.

Demostremos ahora la última propiedad (*) teniendo en cuanta que las dos primeras ya quedan demostradas. Sean $r = m_1/n_1$, $s = m_2/n_2$, entonces $r = m_1 n_2/(n_1 n_2)$, $s = m_2 \cdot n_1/(n_2 n_1)$, y llegamos a la siguiente igualdad:

$$a^r \cdot a^s = \left(a^{\frac{1}{n_1 n_2}}\right)^{m_1 n_2} \cdot \left(a^{\frac{1}{n_1 n_2}}\right)^{m_2 \cdot n_1} = \left(a^{\frac{1}{n_1 n_2}}\right)^{m_1 n_2 + m_2 n_1}$$

La última igualdad es válida puesto que $m_1 \cdot n_2$ y $m_2 \cdot n_1$ son números enteros.

De este modo,

$$a^r \cdot a^s = a^{\frac{(m_1 n_2 + m_2 n_1)}{(n_1 n_2)}} = a^{\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}} = a^{r+s},$$

lo qua se necesita.

Demostremos que, para $a > 1$ y $r > 0$ racional, es válida la desigualdad $a^r > 1$. En efecto, sea $r = m/n$ y $a^r = a^{m/n} \leqslant 1$. Multiplicando término a término n desigualdades mencionadas, obtenemos $a^m \leqslant 1$. La última desigualdad contradice la desigualdad $a^m > 1$ obtenida después de multiplicar término a término m desigualdades de tipo $a > 1$. En fin, notemos que si la fracción racional $r = m/n$ tiene denominador impar n, la definición de la potencia racional puede extenderse también para los números negativos si se supone

$$(-a)^r = a^r, \text{ si } m \text{ es par},$$

$$(-a)^r = -a^r, \text{ si } m \text{ es impar}.$$

2. Función exponencial. Se desprende de los razonamientos del punto anterior que si a es número positivo, entonces la función $y = a^x$ está definida para todos los x racionales.

Es fácil convencerse de que la función $y = a^x$, $a > 1$, definida sobre el conjunto $\{x\}$ de todos los números racionales, crece monótonamente en este conjunto.

En efecto, sean x_1 y x_2 cualesquiera dos número racionales que satisfacen la condición $x_2 > x_1$. Entonces,

$$a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}(a^{x_2 - x_1} - 1).$$

Como $x_2 - x_1 > 0$ y $a > 1$, se tiene $a^{x_2 - x_1} > 1$, o sea, el miembro derecho de la última igualdad es positivo y, por eso $a^{x_2} > a^{x_1}$. El crecimiento de la función a^x sobre el conjunto de los números racionales está demostrado.

Pasamos a la definición de la función a^x *sobre el conjunto de todos los números reales.*

Fijemos un *número real arbitrario* x y consideremos todos los números racionales posibles α y β que satisfacen las desigualdades

$$\alpha < x < \alpha. \qquad (4.2)$$

Definemos a^x, para $a > 1$, como un número real y que satisface las desigualdades

$$a^{\alpha} \leqslant y \leqslant a^{\beta}. \qquad (4.3)$$

Más adelante demostremos que este número *y existe y, además, es único.* Demostremos también que la función definida $y = a^x$ posee las siguientes propiedades importantes: 1) *crece sobre toda la recta infinita,* 2) *es continua en cualquier punto x de esta recta.*

1°. Ante todo demostremos que para cualquier x fijado y cualesquiera números racionales α y β que satisfacen las desigualdades (4.2) *existe un número real y que satisface las desigualdades* (4.3).

Fijemos un número racional arbitrario β que satisface el miembro derecho de (4.2) y consideremos todos los números racionales posibles α que satisfacen la desigualdad izquierda de (4.2).

Ya que $\alpha < \beta$ y la función exponencial definida sobre el conjunto de los números racionales crece, entonces, $a^{\alpha} < a^{\beta}$. De este modo, el conjunto $\{a^{\alpha}\}$ es superiormente acotado y el número a^{β} es una de las cotas superiores de esto conjunto. Por lo tanto, este conjunto tiene cota superior exacta que se denotará mediante y. Queda por demostrar que y satisface las desigualdades (4.3). De la definición de la cota superior exacta se desprende la validez de la desigualdad izquierda de (4.3), la validez de la derecha, de (4.3) se deduce de que a^{β} es una de las cotas superiores e y, cota superior exacta del conjunto $\{a^{\alpha}\}$.

2°. Ahora determinemos que existe *un solo número real y que satisface las desigualdades* (4.3).

Basta demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existen números racionales α y β tales que, verificando las desigualdades (4.2), satisfacen la desigualdad $a^{\beta} - a^{\alpha} < \varepsilon$. En efecto, entonces cualesquiera dos números y_1 e y_2, que satisfacen las desigualdades (4.3), tienen que coincidir, puesto que su diferencia por módulo es menor que cualquier número positivo ε anticipadamente tomado.

Fijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario y un β_0 racional que satisface la desigualdad derecha (4.2). Entonces, como $a^\alpha < a^{\beta_0}$, se obtiene

$$a^\beta - a^\alpha = a^\alpha (a^{\beta-\alpha} - 1) < a^{\beta_0} (a^{\beta-\alpha} - 1).$$

La desigualdad $a^\beta - a^\alpha < \varepsilon$ se demostrará si determinamos la posibilidad de elegir α y β tales que $a^{\beta-\alpha} - 1 < \frac{\varepsilon}{a^{\beta_0}}$.

Del capítulo 2 se desprende que para cualquier n natural se puede escoger números racionales α y β que satisfacen las desigualdades (4.2), de tal modo que la diferencia $\beta - \alpha$ sea menor que $1/n$. De este modo, es suficiente demostrar la existencia de un n natural para el cual

$$a^{1/n} - 1 < \frac{\varepsilon}{a^{\beta_0}}. \tag{4.4}$$

Vamos a convencernos de que es posible elegir este n natural. Sea

$$a^{1/n} = 1 + \delta_n.$$

Puesto que $a^{1/n} > 1$, δ_n es positivo. Empleando la fórmula del binomio de Newton, tendremos $a = (a^{1/n})^n = (1 + \delta_n)^n = 1 + n\delta_n +$ (los términos positivos) $> 1 + n\delta_n$. De aquí $a - 1 > n\delta_n$ y $0 < \delta_n < \frac{a-1}{n}$. Por lo tanto, $a^{1/n} - 1 = \delta_n < \frac{a-1}{n}$. La desigualdad (4.4) será válida si elegimos n de tal modo que n satisfaga la exigencia $\frac{a-1}{n} < \frac{\varepsilon}{a^{\beta_0}}$ o $n > \frac{(a-1)\, a^{\beta_0}}{\varepsilon}$. Acabamos de demostrar la definición unívoca del número y que satisface las desigualdades (4.3).

Observemos que si x es número racional y a^x, el valor de la función exponencial, en el punto x inicialmente definida solamente sobre el conjunto de los números racionales, entonces a^x es aquel número real único y que satisface las desigualdades (4.3).

3°. Demostremos ahora que la función construida a^x (para $a > 1$) *crece en toda la recta infinita.*

Sean x_1 y x_2 cualesquiera números reales que satisfacen la desigualdad $x_1 < x_2$. Obviamente, existen números racionales α y β que satisfacen las desigualdades $x_1 < \alpha < \beta < x_2$ (véase la afirmación demostrada en la parte final del p.1 del § 2 del cap. 2). De la definición de la función exponencial y de su crecimiento sobre el conjunto de los números racionales se desprenden las desigualdades $a^{x_1} \leqslant a^\alpha < a^\beta \leqslant a^{x_2}$, es decir, $a^{x_1} < a^{x_2}$. El crecimiento de la función a^x queda demostrado.

4°. Queda por demostrar la continuidad de la función construida a^x *en cualquier punto* x de la recta infinita.

Sea $\{x_n\}$ cualquier sucesión de números reales, convergente a x. Basta demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que para $n \geqslant N$ es válida la desigualdad $|a^{x_n} - a^x| < \varepsilon$.

Fijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario y escojamos números racionales α y β que satisfacen las desigualdades (4.2) de tal modo que sea válida la desigualdad $a^\beta - a^\alpha < \varepsilon$ (la posibilidad de escoger estos α y β fue demostrada en 2°). Puesto que la sucesión $\{x_n\}$ converge hacia x y $\alpha < x < \beta$, entonces existe un número N tal que para $n \geqslant N$ son válidas las desigualdades $\alpha < x_n < \beta$. De las desigualdades $\alpha < x < \beta$ y $\alpha < x_n < \beta$ y de la monotonía de la función expo-

nencial se desprende que $a^{\alpha} < a^{x_n} < a^{\beta}$ y $a^{\alpha} < a^{x} < a^{\beta}$ (para $n \geq N$). Ya que la diferencia entre los números a^{β} y a^{α} es menor que ε y ambos números a^x y a^{x_n} se comprenden entre a^{α} y a^{β}, entonces $|a^{x_n} - a^x| < \varepsilon$ (para $n \geq N$). La demostración de la continuidad está terminada.

OBSERVACIÓN 1. Si $0 < a < 1$, entonces $a = 1/b$, donde $b > 1$. Pero eso, para $0 < a < 1$, la función $y = a$ puede definirse como la función $y = b^{-x}$, $b > 1$.

Determinemos algunas propiedades de la función exponencial $y = a^x$, $a > 1$.

1) Todos los valores de la función exponencial son positivos. En realidad, sea x un punto arbitrario de la recta numérica y sea que x' es un punto racional tal que $x' < x$. Ya que, por definición, $a^{x'} > 0$ y $a^{x'} < a^x$, se tiene $a^x > 0$.

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$. En efecto, como $a > 1$, tenemos $a = 1 + \alpha$, donde $\alpha > 0$ y $a^n = (1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha$. Por consiguiente, $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$. En virtud de la monotonía de la función $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$. Ya que $a^{-n} = 1/a^n$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} a^{-n} = 0$, y, por eso $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

3) De las propiedades 1) y 2), así como de la monotonía y la continuidad de la función $y = a^x$ se desprende, conforme al lema 1, que *los valores y de esta función llenan toda la semirrecta positiva* $y > 0$.

4) Para cualesquiera números reales x_1 y x_2 son válidas las relaciones

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}, \quad a^{x_1} b^{x_1} = (a \cdot b)^{x_1}, \quad a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}.$$

Efectivamente, ya hemos notado la validez de estas relaciones para los exponentes racionales. Para cerciorarse de la validez de estas relaciones para cualesquiera exponentes, basta considerar las sucesiones $\{x'_n\}$ y $\{x''_n\}$ de números racionales que convergen hacia x_1 y x_2, respectivamente. Entonces, por ejemplo, $a^{x'_n} a^{x''_n} = a^{x'_n + x''_n}$. Pasando al límite, cuando $n \to \infty$, y empleando la propiedad de la continuidad de la función exponencial obtenemos $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$. De manera análoga, podemos cerciorarnos de la validez de otras relaciones enumeradas anteriormente.

OBSERVACIÓN 2. Hemos determinado las propiedades 1) —4) de la función exponencial $y = a^x$ así como su continuidad y crecimiento monótono sobre la recta infinita para el caso de $a > 1$. Notemos que para $0 < a < 1$, en virtud de la observación 1, la función $y = a^x$ es continua y monótonamente decreciente sobre la recta infinita. Además, para esta función se conservan las propiedades 1), 3) y 4), mientras la propiedad 2) se modifica del modo siguiente:

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = 0.$$

En las figs. 4.9 y 4.10 están representadas las gráficas de la función exponencial $y = a^x$ para los casos de $a > 1$ y $0 < a < 1$.

OBSERVACIÓN 3. La propiedad $a^{x_1+x_2} = a^{x_1}a^{x_2}$ puede servir para la definición funcional de la función exponencial $y = a^x$. Se puede demostrar que existe y, además, es única, la función $f(x)$ definida

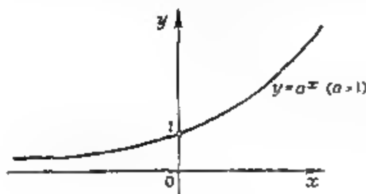


Fig. 4.9

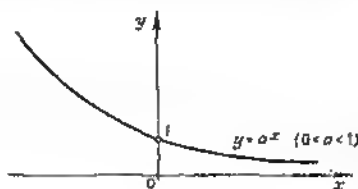


Fig. 4.10

sobre toda la recta infinita y satisface las tres exigencias siguientes:

1) para cualesquiera x_1 y x_2 reales se verifica la relación $f(x_1 + x_2) = f(x_1) f(x_2)$;

2) se verifican las relaciones $f(0) = 1$, $f(1) = a$, donde $a > 0$;

3) es continua cuando $x = 0$.

Esta es la función construida anteriormente a^x.

3. **Función logarítmica.** Consideremos un **segmento arbitrario** $[c, d]$ de la recta infinita. En este segmento la función $y = a^x$ es estrictamente monótona y continua. Por eso, en virtud del lema 1, la función $y = f(x) = a^x$ tiene, en el segmento $[\alpha, \beta]$ donde $\alpha = a^c$, $\beta = a^d$, la función inversa $x = f^{-1}(y)$ que se denomina *logarítmica*. La función logarítmica se denota de la manera siguiente:

$$x = \log_a y.$$

Cambiando, para esta función, la denotación del argumento y por x y la denotación de la función x por y, obtenemos la función

$$y = \log_a x.$$

Notemos las siguientes propiedades de la función logarítmica que se desprenden directamente de su definición:

1°. La función logarítmica está definida para todos los valores positivos de x. Esto se desprende de lo que su argumento son valores de la función exponencial que, en virtud de las propiedades 1) y 3) de esta función (véase el punto anterior), pueden ser positivos y ocupan toda la semirrecta positiva $x > 0$.

2°. La función logarítmica es continua y crece sobre toda la semirrecta abierta $x > 0$ cuando $a > 1$ (decrece cuando $a < 1$), con

tal que para $a > 1$

$$\lim_{x\to 0+0} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty.$$

La validez de esta propiedad se desprende de las propiedades de la función exponencial y de la observación 1 del p. 2 del § 4.

3°. Para cualesquiera x_1 y x_2 positivos

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

Esta propiedad se desprende también de las propiedades de la función exponencial.

OBSERVACIÓN. Vale notar especialmente la función logarítmica $y = \log_e x$, donde $e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Para esta función empleamos la denotación $y = \ln x$. La función logarítmica $y = \ln x$ desempeña importante papel en las matemáticas y sus aplicaciones. Los logaritmos de base e suelen llamarse *naturales*.

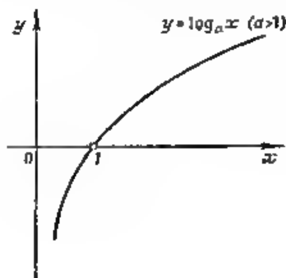


Fig. 4.11

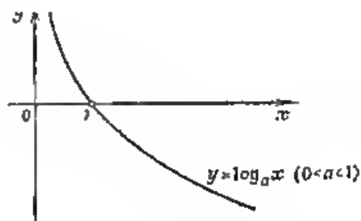


Fig. 4.12

En las figs. 4.11 y 4.12 están representadas las gráficas de la función logarítmica $y = \log_a x$ para los casos de $a > 1$ y $0 < a < 1$.

4. **Funciones hiperbólicas.** Se denominan funciones hiperbólicas las siguientes funciones *):

1°. Seno hiperbólico

$$\text{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

2°. Coseno hiperbólico

$$\text{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

*) La denominación «funciones hiperbólicas» se debe a que las funciones $y = \text{sh}\, x$ o $y = \text{ch}\, x$ pueden definirse geométricamente, al considerar una hipérbola isósceles según las mismas reglas que sirven para definir las funciones $y = \text{sen}\, x$ o $y = \cos x$ considerando una circunferencia unitaria.

3°. Tangente hiperbólica

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

4°. Cotangente hiperbólica

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

De las definiciones de las funciones hiperbólicas se desprende que el seno hiperbólico, el coseno hiperbólico y la tangente hiperbó-

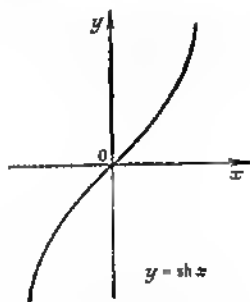


Fig. 4.13

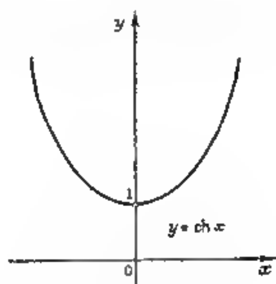


Fig. 4.14

lica están definidas sobre toda la recta numérica. La cotangente hiperbólica está definida en todos los puntos de la recta numérica, excepto el punto $x = 0$.

Las funciones hiperbólicas son continuas en todo punto del campo de definición (éste se desprende de la continuidad de la función exponencial y del teorema 4.2).

Las funciones hiperbólicas poseen una serie de propiedades análogas a las de las funciones trigonométricas. Por ejemplo, para las funciones hiperbólicas sirven los teoremas de adición análogos a los de las funciones trigonométricas. A saber:

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

En las figs. 4.13—4.16 están representadas las gráficas de las funciones hiperbólicas.

5. **Función potencial con cualquier exponente real α.** Sea α número real arbitrario. Definemos la *función potencial* general $y = x^\alpha$,

$x > 0$, de la manera siguiente:

$$y = x^{\alpha}(a^{\log_a x})^{\alpha} = a^{\alpha \log_a x} \quad (a > 1).$$

De la definición de la función potencial se desprende que para $\alpha > 0$ ella es creciente y, para $\alpha < 0$, decreciente.

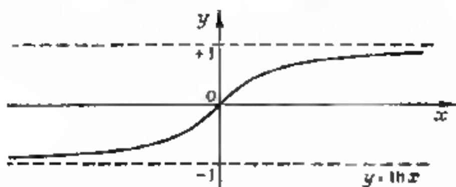


Fig. 4.15

Consideremos el valor límite de la función potencial cuando $x \to 0+0$. Demostremos que

$$\lim_{x \to 0+0} x^{\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha > 0, \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

En efecto, sea $\{x_n\}$ cualquier sucesión de valores del argumento x, convergente a cero por la derecha. Ya que $\lim_{n \to \infty} \log_a x_n = -\infty$, entonces de las propiedades de la función exponencial se desprende que $\lim_{n \to \infty} a^{\alpha \log_a x_n} = 0$, cuando $\alpha > 0$, y $\lim_{n \to \infty} a^{\alpha \log_a x_n} = +\infty$, cuando $\alpha < 0$. Ahora es lógico tomar $0^{\alpha} = 0$ para $\alpha > 0$ y considerar indeterminada esta expresión para $\alpha \leqslant 0$.

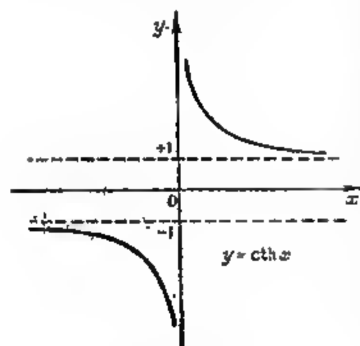


Fig. 4.16

Demostremos la *continuidad* de la función potencial en cualquier punto x de la semirrecta infinita positiva ($x > 0$). Para hacerlo, es suficiente argumentar que esta función es continua por la derecha y por la izquierda en todo punto x de dicha semirrecta (véase la observación en el p. 1 del § 3). Por ejemplo, demostremos que esta función es continua por la izquierda en el punto x (la continuidad por la derecha se demuestra análogamente). Al mismo tiempo, para mayor

precisión, tomaremos $\alpha > 0$. Vamos a emplear la fórmula $y = x^\alpha = a^{\alpha \log_a x}$, $a > 1$. Sea $\{x_n\}$ cualquier sucesión, convergente por la izquierda hacia x, de valores del argumento de la función potencial, así que $x_n < x$. Puesto que la función logarítmica es continua, la sucesión $\{u_n\}$, donde $u_n = \alpha \log_a x_n$, converge hacia $u = \alpha \log_a x$ con tal que todos los elementos u_n son diferentes de u (en efecto,

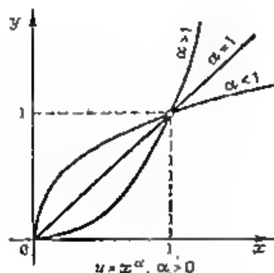


Fig. 4.17

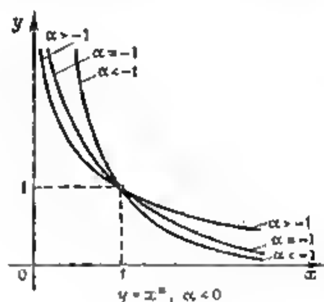


Fig. 4.18

ya que para $a > 1$ la función logarítmica crece, entonces es válida la desigualdad $u_n < u$). En virtud de la continuidad de la función exponencial, la sucesión $\{a^{u_n}\}$ converge hacia a^u. En otras palabras, la sucesión $\{a^{\alpha \log_a x_n}\}$, que representa la sucesión $\{x_n^\alpha\}$, correspondiente a la $\{x_n\}$, de valores de la función potencial, converge hacia $a^{\alpha \log_a x_n}$, es decir, hacia x^α. La continuidad de la función potencial por la izquierda en el punto $x > 0$ queda demostrada. De manera análoga se demuestra su continuidad por la derecha en el punto $x > 0$. Pero la continuidad por la derecha y por la izquierda de una funcion en un punto x significa que la función es continua en este punto. Notemos que si $\alpha > 0$, entonces la función potencial $y = x^\alpha$ es también continua en el punto $x = 0$.

OBSERVACIÓN. Observemos que si el exponente α de una función potencial es un número racional m/n, siendo n un número entero impar, entonces la función potencial $y = x^\alpha$ puede definirse sobre todo el eje numérico, poniendo para $x < 0$

$$y = |x|^\alpha, \text{ si } \alpha = m/n \text{ y } m \text{ es par,}$$
$$y = -|x|^\alpha, \text{ si } \alpha = m/n \text{ y } m \text{ es impar.}$$

En las figs. 4.17—4.20 están representadas las gráficas de la función potencial $y = x^\alpha$ para varios valores de α.

6. Funciones trigonométricas. En las matemáticas elementales, haciendo razonamientos geométricos demostrativos, fueron introducidas las funciones trigonométricas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ *).

Enumeremos algunas propiedades de las funciones trigonométricas que tienen importancia para análisis ulterior:

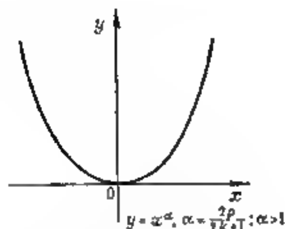


Fig. 4.19

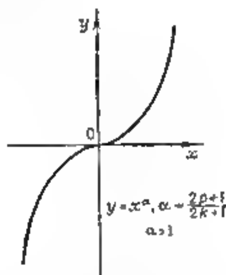


Fig. 4.20

1°. Para cualesquiera x', x'' y x reales son válidas las siguientes relaciones:

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{sen}(x'+x'') = \operatorname{sen} x' \cos x'' + \cos x' \operatorname{sen} x'',\\&\cos(x'+x'') = \cos x' \cos x'' - \operatorname{sen} x' \operatorname{sen} x'',\\&\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.\end{aligned}\right\} \qquad (4.5)$$

2°.

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{sen} 0 = 0; \quad \cos 0 = 1,\\&\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1; \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (4.6)$$

3°. Si $0 < x < \pi/2$, entonces

$$0 < \operatorname{sen} x < x. \qquad (4.7)$$

*) Las demás funciones trigonométricas $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$ e $y = \operatorname{cosec} x$ se definen por medio de las fórmulas mencionadas:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

Notemos que la definición de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ empleando razonamientos geométricos demostiativos no es irreprochable lógicamente puesto que la posibilidad de definir estas funciones para todos los valores reales del argumento x se reduce a la posibilidad de establecer la correspondencia biunívoca entre todos los puntos de la circunferencia unitaria y todos los números reales del segmento $[0, 2\pi]$.

Las propiedades mencionadas se argumentan haciendo razonamientos geométricos. Aquí no daremos las deducciones geométricas de las propiedades 1° y 2° conocidas del curso de las matemáticas elementales. Detengámonos solamente en la deducción geométrica de las desigualdades (4.7). Además de (4.7), demostremos la desigualdad $x < \operatorname{tg} x$ (cuando $0 < x < \pi/2$).

Consideremos la circunferencia de radio 1 con centro en el punto O y el punto A de esta circunferencia (fig. 4.21). Partiendo del punto A, en sentido contrario al de las agujas del reloj, marcaremos arcos de la circunferencia. Sea M punto de la circunferencia que está en el primer cuadrante, x, la longitud del arco $\overset{\frown}{AM}$, $0 < x < \pi/2$ (x es medida en radianes del ángulo AOM), N, la base de la perpendicular bajada desde M hasta OA, B, el punto de intersección de la perpendicular OA trazada desde el punto A y la prolongación del segmento OM. Entonces $MN = \operatorname{sen} x$, $ON = \cos x$, $AB = \operatorname{tg} x$. Ya que el triángulo OMA se comprende en el sector OMA que, a su vez, se comprende en el triángulo OBA y las áreas de dichas figuras son iguales a $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x$, $\frac{x}{2}$ y $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, respectivamente, entonces tienen lugar las desigualdades $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$, $0 < x < \pi/2$. Para dichos valores de x tenemos $\operatorname{sen} x > 0$. De este modo, la validez de las desigualdades $0 \leqslant \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$ (cuando $0 < x < \pi/2$) queda establecida.

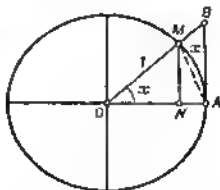


Fig. 4.21

Las propiedades 1°, 2° y 3° pueden servir para la definición de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Se puede demostrar que *existe y, además, un solo par de funciones definidas para todos los valores reales del argumento — la primera denominada* $\operatorname{sen} x$ *y la segunda* $\cos x$ *— que satisfacen las exigencias* 1°, 2°, 3°.

La demostración de esta afirmación se da en el Complemento de este capítulo.

Notemos que de las propiedades 1°, 2° y 3° de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ se puede deducir todas las propiedades conocidas de las matemáticas elementales *).

Demostremos la *continuidad* de las funciones trigonométricas en todo punto de su campo de definición. Primeramente argumentamos la continuidad de la función $y = \operatorname{sen} x$ en el punto $x = 0$. Sea $\{x_n\}$ sucesión arbitraria convergente por la derecha al punto $x = 0$ de valores del argumento x. De las desigualdades (4.7) tenemos $0 <$

*) Por ejemplo, las igualdades $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, $\cos(-x) = \cos x$.

$< \operatorname{sen} x_n < x_n$. De aquí, en virtud del teorema 3.14. se desprende que la sucesión $\{\operatorname{sen} x_n\}$ tiene límite igual a cero. De este modo, $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 = 0$. Puesto que para $(-\pi/2) < x < 0$ son válidas las desigualdades $x < \operatorname{sen} x < 0$ *), entonces, empleando los mismos razonamientos, obtenemos $\lim\limits_{x\to 0-0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0$. Hemos establecido que en el punto $x = 0$ función $y = \operatorname{sen} x$ es continua por la derecha y por la izquierda, o sea, es continua en dicho punto. Para demostrar la continuidad de la función $y = \operatorname{sen} x$ en cualquier punto x de la recta infinita, empleamos la fórmula $\operatorname{sen} x'' - \operatorname{sen} x' = 2\cos\frac{x''+x'}{2}\operatorname{sen}\frac{x''-x'}{2}$ que puede obtenerse de las fórmulas (4.5). Sea $\{x_n\}$ sucesión arbitraria de valores del argumento convergente a x. Suponiendo $x'' = x_n$ y $x' = x$ en la última fórmula, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty}(\operatorname{sen} x_n - \operatorname{sen} x) = 2\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x_n+x}{2}\operatorname{sen}\frac{x_n-x}{2} = 0.$$

La validez de esta conclusión se desprende de que la sucesión $\left\{\cos\frac{x_n+x}{2}\right\}$ es acotada **) y la sucesión $\left\{\operatorname{sen}\frac{x_n-x}{2}\right\}$, infinitesimal, en virtud de lo demostrado anteriormente.

La continuidad de la función $y = \cos x$ se demuestra, empleando los razonamientos análogos y la fórmula

$$\cos x'' - \cos x' = -2\operatorname{sen}\frac{x''+x'}{2}\operatorname{sen}\frac{x''-x'}{2}.$$

La continuidad de las demás funciones trigonométricas ($\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$) en todo punto de su campo de definición se desprende del teorema 4.2.

El campo de definición de toda función trigonométrica se divide en segmentos de monotonía de la función ***). La función $y = \operatorname{sen} x$ crece en todo segmento $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ ****) y decrece en

*) Estas desigualdades se obtienen de las desigualdades (4.7) cambiando x por $-x$ y tomando en consideración la fórmula $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$.

**) La tercera fórmula de las (4.5) permite concluir que $|\cos x| \leqslant 1$ y $|\operatorname{sen} x| \leqslant 1$. De aquí es obvia la acotación de la sucesión $\left\{\cos\frac{x_n+x}{2}\right\}$.

***) La monotonía de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ sobre los segmentos correspondientes se determina fácilmente de las fórmulas

$$\operatorname{sen} x'' - \operatorname{sen} x' = 2\cos\frac{x''+x'}{2}\operatorname{sen}\frac{x''-x'}{2}$$

y

$$\cos x'' - \cos x' = -2\operatorname{sen}\frac{x''+x'}{2}\operatorname{sen}\frac{x''-x'}{2}.$$

****) Aquí, por k se toma cualquier número entero.

todo segmento $\left[(2k+1)\pi-\frac{\pi}{2},\ (2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}\right]$. La función $y=\cos x$ crece en todo segmento $[(2k-1)\pi,\ 2k\pi]$ y decrece en todo segmento $[2k\pi,\ (2k+1)\pi]$. La función $y=\operatorname{tg} x$ crece en todo



Fig. 4.22

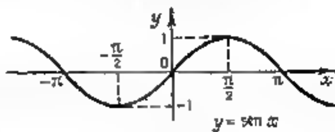


Fig. 4.23

intervalo $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$. La función $y=\operatorname{ctg} x$ decrece en todo intervalo $((k-1)\pi,\ k\pi)$. Para las funciones $y=\sec x$ e $y=\operatorname{cosec} x$ el lector puede determinar fácilmente sus campos de crecimiento y decrecimiento.

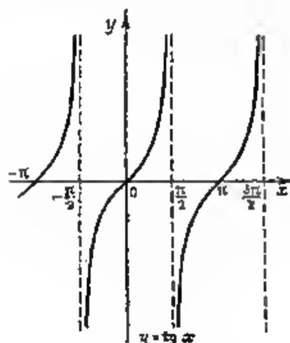


Fig. 4.24

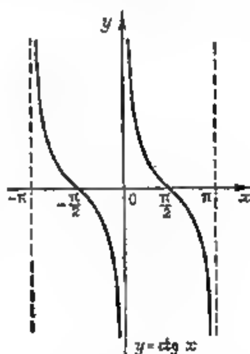


Fig. 4.25

En las figs. 4.22—4.27 están representadas las gráficas de las funciones trigonométricas.

7. Funciones trigonométricas inversas. La función $y=\arcsen x$ se define del modo siguiente. Consideremos la función $y=\operatorname{sen} x$ en el segmento $[-\pi/2,\ \pi/2]$. En el punto anterior hemos señalado que en este segmento la función $y=\operatorname{sen} x$ crece, es continua y tiene el segmento $[-1,\ 1]$ como el conjunto de sus valores. En virtud del corolario del lema 1 para la función $y=\operatorname{sen} x$ existe función inversa y continua sobre el segmento $[-1,\ 1]$. La denotaremos $x=\arcsen y$.

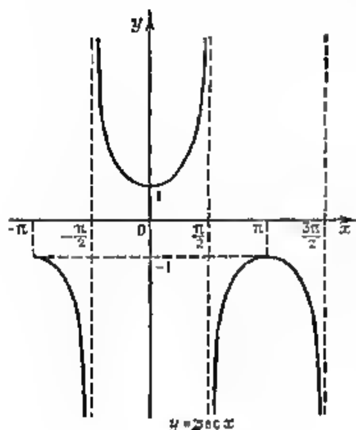


Fig. 4.26

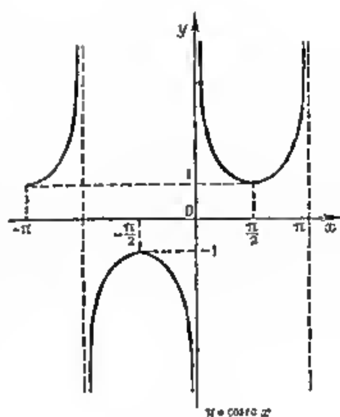


Fig. 4.27

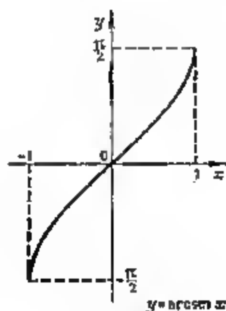


Fig. 4.28

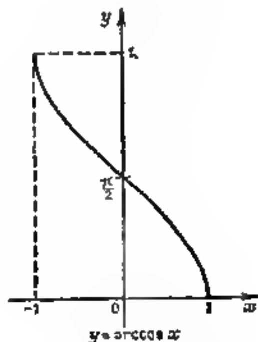


Fig. 4.29

Cambiando para esta función la denotación del argumento y por x. y la denotación x para la función por y, obtenemos la función $y = \arcsen x$. En la fig. 4.28 está representada la gráfica de esta función.

De modo completamente análogo se define la función $y = \arccos x$. El segmento $[-1, 1]$ es su campo de definición y el segmento $[0, \pi]$,

conjunto de sus valores. La función mencionada decrece y es continua sobre el segmento $[-1, 1]$. En la fig. 4.29 está representada la gráfica de la función $y = \arccos x$.

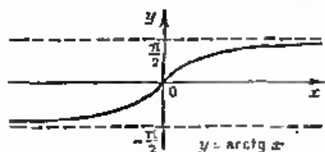


Fig. 4.30

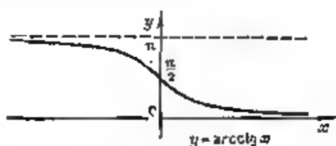


Fig. 4.31

Las funciones $y = \operatorname{arctg} x$ e $y = \operatorname{arcctg} x$ se definen como las inversas de la tangente y la cotangente. Estas funciones están definidas, son monótonas y contínuas en la recta infinita. En las figs. 4.30 y 4.31 están representadas las gráficas de estas funciones.

§ 6. Valores límite de algunas funciones

1. Notas preliminares. En el capítulo 1 hemos dicho que para calcular las derivadas de las funciones $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \log_a x$ hay que demostrar la existencia de los valores límite (o los límites) de la función $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x/2}$, cuando $\Delta x \to 0$ y de la función $\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$, cuando $\Delta x \to 0$ y $x > 0$ está fijado. En el párrafo presente vamos a resolver este problema. Necesitamos demostrar la proposición sobre el valor límite de la función comprendida entre dos funciones que tienen valor límite común en un punto dado. Esta proposición es analogía funcional del teorema 3.14.

Lema 3. *Sea que en cierto* δ *-entorno del punto* a *(excepto, tal vez, el propio punto* a*) están dadas funciones* $f(x)$, $g(x)$ *y* $h(x)$ *con tal que en el punto* a *las funciones* $f(x)$ *y* $g(x)$ *tienen un mismo valor límite igual a* b. *Si en dicho entorno del punto* a *(excepto, tal vez, el propio punto* a*) se cumplen las desigualdades* $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$, *entonces en el punto* a *existe el valor límite de la función* $h(x)$ *y es igual a* b.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n\}$ sucesión arbitraria de valores del argumento x convergente hacia a cuyos elementos x_n se encuentran en dicho δ-entorno del punto a y no son iguales a a; sean $\{f(x_n)\}$, $\{g(x_n)\}$ y $\{h(x_n)\}$ sucesiones correspondientes de valores de las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$. Según la condición

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = b \quad \text{y} \quad f(x_n) \leqslant h(x_n) \leqslant g(x_n).$$

Pero, entonces, en virtud del teorema 3.14, $\lim_{n\to\infty} h(x_n) = b$. Ya que $\{x_n\}$ es sucesión arbitraria de valores del argumento convergente hacia a, entonces la última igualdad significa que $\lim_{x\to a} h(x) = b$. El lema queda demostrado.

2. Valor límite de la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ *) en el punto $x=0$ (primer límite notable). Demostremos el teorema siguiente.

Teorema 4.4. En el punto $x = 0$, el valor límite de la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ existe y es igual a la unidad:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \tag{4.8}$$

DEMOSTRACIÓN. Ya hemos notado que para $0 < x < \pi/2$ son válidas las desigualdades $0 < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$ (véase el p. 6 del párrafo anterior). Dividiendo estas igualdades término a término por sen x, obtenemos

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{o} \quad \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1.$$

Las últimas desigualdades son también válidas para los valores de x que satisfacen las condiciones $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Para convencerse de esto, basta observar que $\cos x = \cos(-x)$ y $\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x}$. Ya que $\cos x$ es función continua, entonces $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$. De este modo, en cierto δ-entorno del punto $x=0$ para las funciones $\cos x$, 1 y $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ se cumplen todas las condiciones del lema 3 (para cerciorarnos de esto, denotemos $f(x) = \cos x$, $g(x) = 1$ y $h(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ y tomemos $\delta = \pi/2$). Por consiguiente, $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \cos x = 1$. El teorema queda demostrado.

---

*) Anteriormente hablamos de la función $\frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$. Si $\frac{\Delta x}{2}$ se denota mediante x, obtenemos la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. En este caso la condición $\Delta x \to 0$ se reduce a la condición $x \to 0$.

3. Valor límite de la función $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, cuando $x \to \infty$ (segundo límite notable)*). Demostremos el teorema siguiente.

Teorema 4.5. *El valor límite de la función $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ existe y es igual a e, cuando $x \to \infty$:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \qquad (4.9)$$

DEMOSTRACIÓN. Hay que demostrar que cualquiera que sea la sucesión infinita $\{x_k\}$ de valores del argumento de la función $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, la sucesión correspondiente $\{f(x_k)\}$ de valores de esta función tiene el número e por su límite. Consideremos cuatro grupos siguientes de sucesiones infinitas del argumento x:

1°. Sucesiones infinitas $\{n_k\}$ cuyos elementos son números positivos enteros. Por ejemplo, dicho grupo incluye la sucesión

$$2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 3,\ 3,\ 2,\ 2,\ 4,\ 4,\ \ldots,\ n+1,\ n+1,\ n,\ n,\ \ldots.$$

2°. Sucesiones infinitas cuyos elementos a partir de cierto número consisten de números reales positivos.

3°. Sucesiones infinitas cuyos elementos a partir de cierto número se componen de números reales negativos.

4°. Sucesiones infinitas que contienen un número infinito de números reales tanto positivos como negativos **).

Observemos que una sucesión infinita completamente arbitraria de valores del argumento se refiere a uno de los grupos 1°, 2°, 3°, 4°. Por eso el teorema será demostrado si demostramos cada uno de los grupos 1°, 2°, 3° y 4°. (Al mismo tiempo, las sucesiones del grupo 1° son de carácter auxiliar). Sea $\{n_k\}$ alguna sucesión del primer grupo.

---

*) El problema mencionado anteriormente del valor límite de la función $\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}$, para $\Delta x \to 0$ y un $x > 0$ fijado, se reduce a dicho problema. En efecto, si tomamos $\frac{\Delta x}{x}=\frac{1}{u}$, entonces, cuando $\Delta x \to 0$, $u \to \infty$ y $\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} = \left(1+\frac{1}{u}\right)^u$; esta función se diferencia de la función $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ solamente por la denotación del argumento.

**) Ya que la función $\left(1+\frac{1}{x}\right)$ no está definido sobre el segmento $[-1, 0]$ (puesto que para los valores de x de este segmento la expresión $\left(1+\frac{1}{x}\right)$ ora es negativa ora no tiene sentido), entonces, es lógico considerar que los elementos de las sucesiones 2°, 3° y 4° no pertenecen al segmento $[-1, 0]$.

Demostremos que $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}=e$. Sea ε cualquier número positivo. Ya que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$ (véase el p. 4 del § 3 del cap 3), entonces se puede indicar un número N^* tal que, para $n\geqslant N^*$, se cumple la desigualdad

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}-e\right|<\varepsilon.$$

Puesto que la sucesión $\{n_k\}$ es infinita y sus elementos son números positivos enteros, para el número positivo N^* se puede indicar un número N tal que, para $k\geqslant N$, se cumple la condicion $n_k\geqslant N^*$. Pero, como ya hemos dicho, para tales n_k enteros se cumple la desigualdad

$$\left|\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}-e\right|<\varepsilon.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}=e.$$

Ahora pasamos a las sucesiones del segundo grupo. Sea $\{x_k\}$ cualquier sucesión del segundo grupo y sea N número, partiendo del cual todos los elementos de esta sucesión son mayores que la unidad. Tomando $k\geqslant N$, denotemos mediante n_k la *parte entera de* x_k, $n_k=[x_k]$. Entonces,

$$n_k\leqslant x_k<n_k+1. \tag{4.10}$$

Notemos que las sucesiones $\{n_k\}$ y $\{n_k+1\}$ son sucesiones del primer grupo. De las desigualdades (4.10) tenemos

$$\frac{1}{n_k+1}<\frac{1}{x_k}\leqslant\frac{1}{n_k}$$

o

$$1+\frac{1}{n_k+1}<1+\frac{1}{x_k}\leqslant 1+\frac{1}{n_k}.$$

De aquí, empleando otra vez las desigualdades (4.10), obtenemos

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}<\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}<\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} \tag{4.11}$$

Los límites de las sucesiones $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}\right\}$ y $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}\right\}$ son iguales a e. En efecto, la primera sucesión puede representarse como el producto de las sucesiones $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}\right\}$ y $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{-1}\right\}$ cuyos límites son iguales a e y 1, respectiva-

mente *). La segunda sucesión es el producto de las sucesiones $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\right\}$ y $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k}\right)\right\}$ cuyos límites son, respectivamente, iguales a e y 1. En virtud de las desigualdades (4.11), según el teorema 3.14 tenemos

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=e.$$

Consideremos las sucesiones del tercer grupo. Si $\{x_k\}$ es una sucesión infinita cuyos elementos, partiendo de cierto número, son negativos, entonces la sucesión $\{z_k\}$, donde $z_k=-1-x_k$, es infinita y sus elementos, partiendo de cierto número, se componen de números reales positivos. Por eso $\{z_k\}$ es sucesión del segundo grupo. Como

$$\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=\left(1+\frac{1}{z_k}\right)^{z_k+1}$$

y

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{z_k}\right)^{z_k+1}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{z_k}\right)^{z_k}\left(1+\frac{1}{z_k}\right)=e,$$

se tiene

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=e.$$

Para terminar la demostración, hace falta considerar las sucesiones del cuarto grupo. Sea $\{x_k\}$ dicha sucesión. Mediante $\{x_k'\}$ denotemos la subsucesión de esta sucesión que se compone de todos los elementos no negativos **) de la sucesión $\{x_k\}$ y mediante $\{x_k''\}$, la subsucesión compuesta de todos los elementos negativos de la sucesión $\{x_k\}$***). Ya que, según lo demostrado

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k'}\right)^{x_k'}=e \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k''}\right)^{x_k''}=e,$$

entonces, para cualquier $\varepsilon>0$ se puede indicar un elemento N tal que para $k\geqslant N$

$$\left|\left(1+\frac{1}{x_k'}\right)^{x_k'}-e\right|<\varepsilon \quad \text{y} \quad \left|\left(1+\frac{1}{x_k''}\right)^{x_k''}-e\right|<\varepsilon$$

es decir, para $k\geqslant N$

$$\left|\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}-e\right|<\varepsilon.$$

*) Al mismo tiempo, se toma en consideración que $\{n_k\}$ pertenece al primer grupo.

**) Estos elementos, partiendo de cierto número, son estrictamente positivos.

***) Marcamos aquí, a diferencia del capítulo 3, las subsucesiones elegidas mediante los signos ′ y ″ dejando, al mismo tiempo, para un elemento de la subsucesión el mismo número que él tenía en la sucesión $\{x_k\}$.

Por consiguiente,

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=e.$$

El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. Del teorema demostrado se desprende que

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

En efecto, sea $\{x_n\}$ cualquier sucesión, convergente a cero, de valores del argumento de la función $(1+x)^{1/x}$ cuyos elementos x_n son distintos de cero. Entonces, la sucesión $\{z_n\}$, donde $z_n = 1/x_n$, es infinita (véase el teorema 3.6). Como

$$(1+x_n)^{1/x_n}=\left(1+\frac{1}{z_n}\right)^{z_n} \text{ y } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{z_n}\right)^{z_n}=e,$$

se tiene

$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{1/x_n}=e.$$

y, por eso,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

§ 7. Continuidad y valores límite de algunas funciones compuestas

1. Continuidad y valores límite de algunas funciones compuestas. Demostremos la continuidad de algunas funciones compuestas.

1°. Sean $x=\varphi(t)$ e $y=f(x)$ funciones elementales más simples (vease el § 5) con tal que el conjunto de los valores $\{x\}$ de la función $x=\varphi(t)$ es el campo de definición de la función $y=f(x)$. De los resultados del § 5 se desprende que las funciones elementales más simples son continuas en todo punto del campo de definición. Por eso, en virtud del teorema 4.3, la función compuesta $y=f(\varphi(t))$ o sea, la superposición de dos funciones elementales, es continua. Por ejemplo, la función $y=\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ es continua en cualquier punto $x\neq 0$. Para convencerse de esto, baste considerar las funciones $x=t^{-1}$ e $y=\operatorname{sen} x$. La función compuesta $y=\operatorname{sen} t^{-1}$ se diferencia de la función $y=\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ solamente por la denotación del argumento y, en virtud de lo dicho anteriormente, es continua en cualquier punto $t\neq 0$. Realizando los razonamientos análogos, es fácil cerciorarse de que la función $y=\ln\operatorname{sen} x$ es continua en cualquier punto de todo intervalo $(2k\pi, (2k+1), \pi)$ *).

*) Donde $\operatorname{sen} x > 0$.

2°. EXPRESIONES POTENCIAL-EXPONENCIALES $u(x)^{v(x)}$.

Es obvio que tiene sentido solamente el caso de $u(x) > 0$. Es fácil de convencerse de que si $u(x)$ y $v(x)$ son continuas en el punto a y $u(x) > 0$ en el entorno del punto a, entonces la función $u(x)^{v(x)}$ es también continua en el punto a.

En efecto, $u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$. Ya que $\ln u(x)$ es función continua en el punto a, entonces la función $v(x) \ln u(x)$ es también continua en el punto a. Pero, entonces la función $e^{v(x) \ln (u(x)}$ es continua en el punto a. Notemos que la propiedad de la continuidad que hemos demostrado permite comprobar que, para las suposiciones hechas $\lim\limits_{x \to a} u(x)^{v(x)} = u(a)^{v(a)}$.

3°. **Valores límite de expresiones potencial-exponenciales.**

Examinemos el problema de los valores límite de las expresiones potencial-exponenciales $u(x)^{v(x)}$ cuando $x \to a$. Además, suponemos que $u(x) > 0$ en entorno del punto a.

De la relación $u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$ se deduce, que, cuando $x \to a$, el valor límite de la expresión $u(x)^{v(x)}$ depende del valor límite de la expresión $v(x) \ln u(x)$.

I. Sea $\lim\limits_{x \to a} v(x) \ln u(x) = b$.

Vamos a convencernos de que en este caso $\lim\limits_{x \to a} u(x)^{v(x)} = e^b$.

En efecto, la función

$$w(x) = \begin{cases} v(x) \ln u(x), & \text{si } x \neq a, \\ b, & \text{si } x = a \end{cases}$$

es continua en el punto $x = a$. Por eso, la función compuesta $e^{w(x)}$ es también continua en este punto. Por consiguiente, $\lim\limits_{x \to a} e^{w(x)} = e^{w(a)} = e^b$. Ya que $\lim\limits_{x \to a} e^{w(x)} = \lim\limits_{x \to a} e^{v(x) \ln u(x)}$, entonces $\lim\limits_{x \to a} u(x)^{v(x)}$ existe y es igual a e^b.

Empleando los datos referentes a los valores límite de e^w cuando $w \to -\infty$ y $w \to +\infty$, es fácil de cerciorarse de que

II. Si $\lim\limits_{x \to a} v(x) \ln u(x) = -\infty$, entonces $\lim\limits_{x \to a} u(x)^{v(x)} = 0$.

III. Si $\lim\limits_{x \to a} v(x) \ln u(x) = +\infty$, entonces $\lim\limits_{x \to a} u(x)^{v(x)} = +\infty$.

La relación establecida entre los valores límite de las expresiones $u(x)^{v(x)}$ y $v(x) \ln u(x)$ permite, en algunos casos, hallar fácilmente el valor límite de la función $u(x)^{v(x)}$ si se conocen los valores límite de las funciones $u(x)$ y $v(x)$. Consideremos, por ejemplo, los casos siguientes:

1) Existen $\lim\limits_{x \to a} u(x) > 0$ y $\lim\limits_{x \to a} v(x)$.

2) $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$, $b > 1$, $\lim\limits_{x \to a} v(x) = +\infty$.

3) $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$, $b > 1$, $\lim\limits_{x \to a} v(x) = -\infty$

Cerciorémonos de que en el caso 1) $\lim\limits_{x \to a} u(x)^{v(x)} = [\lim\limits_{x \to a} u(x)]^{\lim\limits_{x \to a} v(x)}$.

En efecto, ya que $\lim\limits_{x \to a} u(x) > 0$, entonces, conforme a la continuidad de la función logarítmica, $\lim\limits_{x \to a} \ln (u(x)$ existe y es igual a $\ln [\lim\limits_{x \to a} u(x)]$.

Por eso existe $\lim\limits_{x \to a} v(x) \ln u(x) = \lim\limits_{x \to a} v(x) \ln [\lim\limits_{x \to a} u(x)]$.

Según I, de aquí se desprende que

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} v(x)\ln u(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} v(x)\ln[\lim\limits_{x\to a} u(x)]} = [\lim_{x\to a} u(x)]^{\lim\limits_{x\to a} v(x)}.$$

En el caso 2) $\lim\limits_{x\to a} v(x)\ln u(x) = +\infty$, y, por eso, según III, $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = +\infty$.

En el caso 3) $\lim\limits_{x\to a} v(x)\ln u(x) = -\infty$, y, por eso, según II, $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = 0$.

Para concluir, mencionemos tres casos cuando se necesita el estudio para hallar el valor límite de $u(x)^{v(x)}$.

1. *Indeterminación de forma* 1^{∞}:

$$\lim_{x\to a} u(x) = 1, \quad \lim_{x\to a} v(x) = \infty$$

2. *Indeterminación de forma* 0^0:

$$\lim_{x\to a} u(x) = 0, \quad \lim_{x\to a} v(x) = 0$$

3. *Indeterminación de forma* ∞^0.

$$\lim_{x\to a} u(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to a} v(x) = 0.$$

Para el primero de estos casos aducimos la fórmula, cómoda para las aplicaciones prácticas.

Transformemos la expresión $u(x)^{v(x)}$ del modo siguiente:

$$u(x)^{v(x)} = \left\{[1 + (u(x) - 1)]^{\frac{1}{u(x)-1}}\right\}^{[u(x)-1]\,v(x)}.$$

Luego, llamemos

$$U(x) = [1 + (u(x) - 1)]^{\frac{1}{u(x)-1}} \text{ y } V(x) = [u(x) - 1]\,v(x),$$

así que

$$u(x)^{v(x)} = U(x)^{V(x)}.$$

Puesto que $\lim\limits_{x\to a} U(x) = e$ (véase la observación del teorema 4.5) y $e > 1$, entonces el valor $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = \lim\limits_{x\to a} U(x)^{V(x)}$ *depende* del valor límite de la función $V(x)$ en el punto a, es decir, de $\lim\limits_{x\to a} [u(x) - 1]\,v(x)$. A saber, si $\lim\limits_{x\to a} [u(x) - 1]\,v(x) = \lim\limits_{x\to a} V(x) = c$, entonces $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = \lim\limits_{x\to a} U(x)^{V(x)} = e^c$ (véase el caso 1)); si $\lim\limits_{x\to a} [u(x) - 1]\,v(x) = +\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = +\infty$

(el caso 2)); si $\lim\limits_{x\to a}[u(x)-1]v(x)=-\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to a}u(x)^{v(x)}=0$ (véase el caso 3)). De este modo, obtenemos la siguiente fórmula:

$$\lim_{x\to a}u(x)^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}[u(x)-1]v(x)}$$

Las indeterminaciones de tipo 2 y 3 se reducen a la indeterminación de tipo 1 de la manera siguiente.

Hagamos

$$U(x)=e^{v(x)},\quad V(x)=\ln u(x).$$

Es evidente que $\lim\limits_{x\to a}U(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to a}V(x)=\pm\infty$. Además,

$$u(x)^{v(x)}=[e^{V(x)}]^{\ln U(x)}=e^{\ln U(x)^{V(x)}}=U(x)^{V(x)}.$$

EJEMPLO. Hallemos $\lim\limits_{x\to 0}[\cos x]^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}$. Ya que $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ y $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}=\infty$, entonces tenemos la indeterminación de forma 1^∞.

Empleemos la fórmula $\lim\limits_{x\to 0}u(x)^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}[u(x)-1]v(x)}$ obtenida anteriormente. Tenemos

$$\lim_{x\to 0}[u(x)-1]v(x)=$$
$$=\lim_{x\to 0}[\cos x-1]\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}=\lim_{x\to 0}\left[-2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right]\times$$
$$\times\frac{1}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}=-\frac{1}{2}.$$

Por eso,

$$\lim_{x\to 0}[\cos x]^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

4°. VALORES LÍMITE DE ALGUNAS FUNCIONES COMPUESTAS. Demostremos la validez de las igualdades siguientes:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\\&\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}\right\}\qquad(4.12)$$

1) Consideremos el primero de estos límites. Tenemos

$$\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{(1+x)^{1/n}-1}{x}=$$
$$=\frac{\left[(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\right]\left[(1+x)^{\frac{n-1}{n}}+(1+x)^{\frac{n-2}{n}}+\ldots+(1+x)^{\frac{1}{n}}+1\right]}{x\left[(1+x)^{\frac{n-1}{n}}+(1+x)^{\frac{n-2}{n}}+\ldots+(1+x)^{\frac{1}{n}}+1\right]}=$$

$$= \frac{\left[(1+x)^{\frac{1}{n}}\right]^n}{x\left[(1+x)^{\frac{n-1}{n}}+(1+x)^{\frac{n-2}{n}}+\ldots+(1+x)^{\frac{1}{n}}+1\right]} =$$

$$= \frac{1}{(1+x)^{\frac{n-1}{n}}+(1+x)^{\frac{n-2}{n}}+\ldots+(1+x)^{\frac{1}{n}}+1}.$$

Puesto que, para $x \to 0$, el denominador de la última expresión tiene límite igual a n (la función $(1+x)^{k/n}$ es continua en el punto $x=0$ y por eso $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{k/n}=1$), entonces $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n}$.

2) Pasamos a la demostración de la segunda igualdad (4.12). Tenemos $\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln(1+x)^{1/x}$. Continuemos definiendo la función $f(x)=(1+x)^{1/x}$, poniendo $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$. Como resultado, obtenemos la función $f(x)$ continua en el punto $x=0$. Entonces, la función $\ln f(x)$ será también continua en el punto nulo y por eso $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln f(0)=\ln e=1$. Así pues, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

3) Demostremos la validez de la tercera igualdad (4.12). Hagamos $x=\ln(1+u)$ y observemos que para $x\to 0$ la variable u tiende a cero. Tenemos $\frac{e^x-1}{x}=\frac{u}{\ln(1+u)}$. De aquí se desprende que

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=1.$$

4) Demostremos la validez de la última igualdad (4.12). Tenemos $\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}$. Como $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=1$ (véase (4.8)), se tiene $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$.

Empleando las relaciones (4.8), (4.12), la igualdad (4.1) y el símbolo $o(x)$ (véase el p. 3 del § 2), es fácil convencerse de la validez de las fórmulas siguientes:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{sen} x = x + o(x),\\ &\sqrt[n]{1+x} = 1+\frac{x}{n}+o(x),\\ &\ln(1+x) = x+o(x),\\ &e^x = 1+x+o(x),\\ &\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2). \end{aligned}\right\} \qquad (4.13)$$

Demostremos, por ejemplo, la validez de la primera fórmula. Ya que $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, entonces, en virtud de (4.1), $\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 + \alpha(x)$, donde $\alpha(x)$ es función infinitesimal en el punto $x = 0$. De la última fórmula se desprende que $\operatorname{sen} x = x + x\alpha(x)$. Como $x\alpha(x) = o(x)$, se tiene $\operatorname{sen} x = x + o(x)$.

2. Concepto de función elemental. Clase de funciones elementales. En las matemáticas aplicadas desempeña importante papel la clase de funciones que se obtienen haciendo un número finito de operaciones aritméticas sobre funciones elementales más simples, así como efectuando superposiciones de estas funciones. Por ejemplo, las funciones $x^2 + 3\cos 2x$, $\ln|\operatorname{sen} 3x| - e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$ pertenecen a dicha clase. Esta clase de funciones se llama *clase de funciones elementales* y toda funcion de ésta, *elemental*.

Notemos la siguiente propiedad de las funciones elementales: *son continuas en todo punto del campo de definición* *).

Esta propiedad se desprende directamente de los teoremas 4.2 y 4.3 y la continuidad de las funciones elementales más simples en todo punto del campo de definición.

§ 8. Clasificación de los puntos de discontinuidad de la función

1. Puntos de discontinuidad de la función y su clasificación. En el p. 1 del. § 3 hemos definido los puntos de discontinuidad de la función como puntos en los cuales la función no posee la propiedad de continuidad. Denominaremos también puntos de discontinuidad de la función los puntos en los cuales la función no es definida, pero en cuyo ε-entorno cualquiera existen puntos del campo de definición de la función.

Consideremos los tipos posibles de los puntos de discontinuidad de la función.

1°. *Discontinuidad evitable. El punto a se denomina punto de discontinuidad evitable de una función $y = f(x)$ si el valor límite de la función en este punto existe, pero, en el punto a, la función $f(x)$ ora no es definida ora su valor particular $f(a)$ en el punto a no es igual al valor límite.*

Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

*) Si, además, el campo de definición de la función se compone de algunos puntos aislados, es lógico considerar que, por definición, la función es continua en cada uno de estos puntos.

tiene, en el punto cero, discontinuidad evitable, puesto que su valor límite en el punto $x = 0$ es igual a 1 y el particular, a 2. Si, en el punto a, la función $f(x)$ tiene discontinuidad del tipo mencionado, *es posible evitarla* sin cambiar, al mismo tiempo, los valores de la función en los puntos distintos de a. Para hacerlo, es suficiente definir el valor de la función en el punto a igual a su valor límite en este punto. Así pues, si en el ejemplo considerado tomamos $f(0) = 1$ entonces, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ y la función será continua en el punto $x = 0$.

OBSERVACIÓN. En la práctica, los puntos de discontinuidad evitable se encuentran en distribuciones concentradas de magnitudes físicas.

2°. ***Discontinuidad de primer género.*** *El punto a se denomina punto de discontinuidad de primer género si en este punto la función $f(x)$ tiene valores límite derecho e izquierdo finitos pero no iguales uno a otro:*

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \neq \lim_{x \to a-0} f(x) \quad (\text{o } f(a+0) \neq f(a-0))$$

1. Para la función $f(x) = \operatorname{sgn} x$ el punto $x = 0$ es punto de discontinuidad de primer género (véase la fig. 4.4). En efecto, ya que

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ -1, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

se tiene

$$\lim_{x \to 0+0} \operatorname{sgn} x = 1, \quad \lim_{x \to 0-0} \operatorname{sgn} x = -1.$$

2. La función $f(x) = \frac{1}{1+2^{1/x}}$, definida en todos los puntos excepto el punto $x = 0$, tiene, en el punto $x = 0$, la discontinuidad de primer género (fig. 4.32). En efecto si $\{x_n\}$ es sucesión convergente a cero, cuyos elementos son positivos, entonces $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ es sucesión infinita con elementos positivos y, por eso, $\{1 + 2^{1/x_n}\}$ es también sucesión infinita. Pero, entonces la sucesión $\left\{\frac{1}{1+2^{1/x_n}}\right\}$ es infinitesimal y por eso $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = 0$. Si $\{x_n\}$ es sucesión convergente a cero cuyos elementos son negativos, entonces $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ es sucesión infinita de términos negativos y por eso $\lim\limits_{n \to \infty} 2^{1/x_n} = 0$. Por consiguiente, $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = 1$.

3°. ***Discontinuidad de segundo género.*** *El punto a se denomina punto de discontinuidad de segundo género si en este punto la función $f(x)$ no tiene al menos uno de los valores límite unilaterales o si al menos uno de los valores límite unilaterales es infinito.*

Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ (fig. 4.33)*. En el punto $x = 0$ esta función no tiene valor límite derecho ni

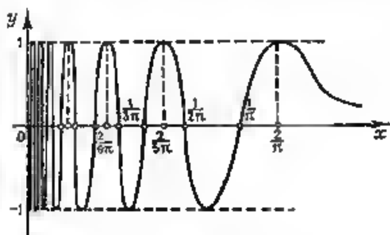


Fig. 4.32

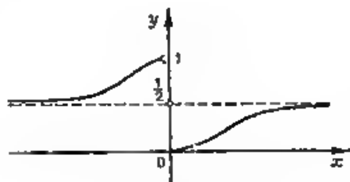


Fig. 4.33

izquierdo. En efecto, consideremos las siguientes sucesiones de valores del argumento convergentes a cero por la derecha:

$$\frac{2}{\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{9\pi}, \ldots, \frac{2}{(4n-3)\pi}, \ldots$$

y

$$\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \ldots, \frac{1}{n\pi}, \ldots$$

Las sucesiones correspondientes de valores de la función $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ tienen la forma siguiente:

$$1, 1, 1, \ldots, 1, 1 \ldots$$
$$0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots$$

La primera de estas sucesiones tiene límite igual a la unidad y la segunda, igual a cero. Por consiguiente, en el punto $x = 0$, la función $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ no tiene valor límite derecho. Ya que $\operatorname{sen} \frac{1}{-x} = -\operatorname{sen} \frac{1}{x}$, entonces esta función tampoco tiene valor límite izquierdo en este punto.

La función $y = \operatorname{ctg} x$ es otro ejemplo de la función que tiene puntos de discontinuidad de segundo género (véase la fig. 4.25). Esta

*) La fig. 4.33 es de carácter puramente ilustrativo.

función tiene discontinuidad de segundo género en cada uno de los puntos πn, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2. Funciones continuas a trozos. Una función $y = f(x)$ se denomina *continua a trozos* en el segmento $[a, b]$ si es continua en todos los puntos interiores de $[a, b]$, excepto, tal vez, un número finito de puntos en los que tiene discontinuidad de primer género y, además, tiene valores límite unilaterales en los puntos a y b. La función se denomina continua a trozos en un intervalo o en la recta infinita si es continua a trozos en cualquier segmento que les pertenece. Por ejemplo, la función $f(x) = [x]$*) es continua a trozos tanto en cualquier segmento como en la recta infinita.

Complemento

Demostración de la afirmación del p. 6 del § 5

En el presente complemento se da la demostración de la afirmación del p. 6 del § 5. Para mayor comodidad, enunciemos aquí esta afirmación en la forma siguiente.

Existe y, además, es único un par de funciones $S(x)$ y $C(x)$ definidas sobre toda la recta infinita y que satisfacen las tres exigencias siguientes:

1°. *Para cualesquiera números reales x', x'' y x se cumplen las relaciones*

$$S(x' + x'') = S(x')\,C(x'') + C(x')\,S(x''),$$
$$C(x' + x'') = C(x')\,C(x'') - S(x')\,S(x''),$$
$$S^2(x) + C^2(x) = 1. \qquad (4.5')^{**)}$$

2°.

$$\left.\begin{aligned} S(0) &= 0, & C(0) &= 1, \\ S\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1, & C\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.6')$$

3° *Para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ son válidas las desigualdades*

$$0 < S(x) < x. \qquad (4.7')$$

Dividimos la demostración de esta afirmación en dos partes, a saber, en primer lugar, demostremos la *unicidad* y después, la *existencia* de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ que satisfacen las exigencias 1°, 2° y 3°.

1. Demostración de la unicidad. Para demostrar la unicidad es suficiente cerciorarse de la validez de las dos afirmaciones siguientes:

1) *Las funciones $S(x)$ y $C(x)$ que poseen las propiedades enumeradas son continuas sobre toda la recta numérica.*

2) *Los valores de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ se determinan de un solo modo sobre cierto conjunto siempre denso de puntos de la recta infinita* ***).

En efecto, en virtud de la continuidad de las funciones $S(x)$ y $C(x)$, sus valores particulares en todo punto x de la recta infinita son iguales a sus valores

---

*) Recordemos que el símbolo $[x]$ significa la parte entera del número x.

**) Las fórmulas (4.5') — (4.7') se obtienen de las fórmulas (4.5) — (4.7) del p. 6 del § 5 cambiando las denotaciones de las funciones sen x y cos x por $S(x)$ y $C(x)$, respectivamente.

***) Un conjunto $\{x\}$ de puntos de la recta infinita se denomina *siempre denso* en la recta infinita si en cualquier ε-entorno de cada punto de esta recta existe un número infinito de puntos del conjunto $\{x\}$.

límite en este punto. Si consideramos una sucesión de valores del argumento convergente a x cuyos elementos pertenecen a dicho conjunto siempre denso de puntos, entonces las sucesiones correspondientes de valores de las funciones $S(x)$ y $C(x)$, conforme a la afirmación 2) enunciada anteriormente, se determinan de un solo modo, por lo que los límites de estas sucesiones también se determinan de un solo modo. Pero estos límites son exactamente los valores particulares de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ en el punto x. Por consiguiente, las funciones $S(x)$ y $C(x)$ se determinan de un solo modo sobre toda la recta infinita.

1) Antes de pasar a la demostración de la continuidad de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ deducimos algunas fórmulas.

Poniendo $x' = x$, $x'' = -x$ en los dos primeras relaciones de (4.5') y teniendo en cuenta que $S(0) = 0$, $C(0) = 1$, obtenemos

$$\left.\begin{array}{l} 0 = S(x)\cdot C(-x) + C(x)\cdot S(-x), \\ 1 = C(x)\cdot C(-x) - S(x)\cdot S(-x). \end{array}\right\} \tag{4.14}$$

Multipliquemos las relaciones (4.14) por $S(x)$ y $C(x)$, respectivamente, y sumamos las relaciones obtenidas. Tomado en consideración que $S^2(x) + C^2(x) = 1$, obtenemos $C(-x) = C(x)$.

De manera completamente análoga, multiplicando las relaciones (4.14) por $C(x)$ y $-S(x)$, respectivamente, y sumándolas, obtenemos $S(-x) = -S(x)$. De este modo, $C(x)$ es función *par* y $S(x)$, *impar* *).

Pero entonces, empleando la primera fórmula de (4.5'), obtenemos

$$S(x'') = S\left(\frac{x'+x''}{2} + \frac{x''-x'}{2}\right) = S\left(\frac{x'+x''}{2}\right) C\left(\frac{x''-x'}{2}\right) + C\left(\frac{x'+x''}{2}\right) S\left(\frac{x''-x'}{2}\right)$$

y, análogamente,

$$S(x') = S\left(\frac{x'+x''}{2} + \frac{x'-x''}{2}\right) = S\left(\frac{x'+x''}{2}\right) C\left(-\frac{x''-x'}{2}\right) + C\left(\frac{x'+x''}{2}\right) S\left(-\frac{x''-x'}{2}\right) = S\left(\frac{x'+x''}{2}\right) \times C\left(\frac{x''-x'}{2}\right) - C\left(\frac{x'+x''}{2}\right) S\left(\frac{x''-x'}{2}\right).$$

Restando término a término las dos últimas fórmulas, obtenemos

$$S(x'') - S(x') = 2C\left(\frac{x'+x''}{2}\right) S\left(\frac{x''-x'}{2}\right). \tag{4.15}$$

Demostremos ahora la continuidad de las funciones $C(x)$ y $S(x)$ en cualquier punto x de la recta infinita. Observemos que la continuidad de la función $S(x)$ *por la derecha en el punto* $x = 0$ se desprende directamente de la relación (4.7') y de la igualdad $S(0) = 0$. En efecto, si $\{x_n\}$ es sucesión arbitraria de valores del argumento convergente a cero por la derecha, entonces de la relación $0 < S(x_n) < x_n$ deducimos que la sucesión correspondiente de valores de la función $\{S(x_n)\}$ también converge a cero, es decir, al valor particular $S(0)$.

Del *carácter impar* de la función $S(x)$ se desprende la continuidad de esta función *por la izquierda en el punto* $x = 0$. De este modo, la función $S(x)$ es *continua en el punto* $x = 0$.

*) La función $f(x)$ definida sobre la recta infinita se denomina *impar* si $f(-x) = -f(x)$ y *par*, si $f(-x) = f(x)$.

La continuidad de $S(x)$ *en cualquier punto* x se desprende de la relación (4.15). En efecto, sea x *cualquier punto de la recta infinita, y* $\{x_n\}$ *sucesión arbitraria de valores del argumento convergente a* x. Haciendo $x' = x$, $x'' = x_n$ en (4.15), tendremos

$$S(x_n) - S(x) = 2C\left(\frac{x+x_n}{2}\right) S\left(\frac{x_n - x}{2}\right). \qquad (4.16)$$

En virtud de que $S(x)$ es continua en el cero y $S(0)=0$, obtenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} S\left(\frac{x_n - x}{2}\right) = 0$. Puesto que la sucesión $\left\{C\left(\frac{x+x_n}{2}\right)\right\}$ es *acotada* *), el miembro derecho (y, por lo tanto, el izquierdo) de (4.16) tiene por su límite el cero. Pero esto significa que $\lim\limits_{n\to\infty} S(x_n) = S(x)$, o sea, la función $S(x)$ es continua en el punto x.

De manera análoga se demuestra la continuidad de la función $C(x)$. Para hacerlo, en vez de (4.15) hay que deducir la fórmula

$$C(x'') - C(x') = -2S\left(\frac{x''+x'}{2}\right) S\left(\frac{x''-x'}{2}\right).$$

2) Demostremos que los valores de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ se determinan de un solo modo en los puntos $p\frac{\pi}{2^n}$, donde p es número entero positivo o negativo y n es número entero positivo. Notemos que estos puntos forman un conjunto siempre denso de puntos de la recta numérica. Demostremos algunas propiedades de las funciones $S(x)$ y $C(x)$. En primer lugar, demostremos que estas funciones son *periódicas y tienen el período* 2π**). En efecto, poniendo $x'' = x + 2\pi$ y $x' = x$ en (4.15), obtenemos

$$S(x+2\pi) - S(x) = 2\,C(x+\pi)\,S(\pi).$$

Ya que $S(\pi) = S\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 2S\left(\frac{\pi}{2}\right) C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, de la última relación se desprende que

$$S(x+2\pi) = S(x),$$

o sea, la función $S(x)$ es periódica y tiene el período 2π. En particular, de aquí se desprende que $S(2\pi) = 0$.

Poniendo $x' = x$ y $x'' = 2\pi$ en la segunda fórmula de (4.5'), y teniendo en cuenta que $S(2\pi) = 0$, hallamos

$$C(x+2\pi) = C(x)\,C(2\pi).$$

Como $C(2\pi) = 1$ (es fácil convencerse de esto aplicando las fórmulas (4.5') primero para $x' = \pi/2$ y $x'' = \pi/2$, y, después, para $x' = \pi$ y $x'' = \pi$), se tiene

$$C(x+2\pi) = C(x).$$

De este modo, la periodicidad de $C(x)$ queda también establecida.

La propiedad de periodicidad de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ permite limitarnos, en nuestros razonamientos, al segmento $[0, 2\pi]$. Determinemos ahora qué

*) De la relación $S^2(x) + C^2(x) = 1$ se desprende que $|C(x)| \leqslant 1$ para todos los x, de donde se deduce la acotación de la sucesión $\left\{C\left(\frac{x+x_n}{2}\right)\right\}$.

**) La función $f(x)$ se denomina *periódica de período* $a > 0$ si para cualquier x es válida la relación $f(x+a) = f(x)$.

signos tienen los valores de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ en distintos puntos de este segmento. De (4.6'), (4.7') y la continuidad de $S(x)$ se desprende que en el segmento $[0, \pi/2]$ los valores de la función $S(x)$ son no negativos con tal que en este segmento la función $S(x)$ se anula solamente en el punto $x = 0$. Como $S(\pi - x) = S(\pi)\, C(-x) - C(\pi)\, S(x)$ *) y $S(\pi) = 0$, $C(\pi) = -1$, se tiene $S(\pi - x) = S(x)$. Por eso, en el segmento $[\pi/2, \pi]$ los valores de la función $S(x)$ son no negativos con tal que en este segmento la función $S(x)$ se anula solamente en el punto $x = \pi$. De la fórmula $S(2\pi - x) = -S(x)$, que se obtiene análogamente a la fórmula $S(\pi - x) = S(x)$, se desprende que en el segmento $[\pi, 2\pi]$ los valores de la función $S(x)$ son no positivos con tal que la función $S(x)$ se anula solamente en los extremos de este segmento. Realizando razonamientos completamente análogos podemos convencernos de que la función $C(x)$ es no negativa en los segmentos $[0, \pi/2]$ y $[3\pi/2, 2\pi]$ y no positiva en el segmento $[\pi/2, 3\pi/2]$, y se anula solamente en los puntos $\pi/2$ y $3\pi/2$.

Para terminar de demostrar la unicidad de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ necesitaremos algunas fórmulas. Pasamos a su deducción. En primer lugar, notemos que de (4.5') se desprenden las fórmulas siguientes **):

$$S^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - C(x)}{2}, \quad C^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + C(x)}{2}. \tag{4.17}$$

Poniendo en estas fórmulas $x = x' + x''$ y aplicando otra vez las fórmulas (4.5'), obtenemos las relaciones que nos interesan

$$S^2\left(\frac{x' + x''}{2}\right) = \frac{1 - C(x')\, C(x'') + S(x')\, S(x'')}{2},$$

$$C^2\left(\frac{x' + x''}{2}\right) = \frac{1 + C(x')\, C(x'') - S(x')\, S(x'')}{2}.$$

Estas fórmulas muestran que si son conocidos los valores de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ en los puntos x' y x'', entonces los valores de estas funciones en el punto $\frac{x' + x''}{2}$ se determinan de un solo modo puesto que de los razonamientos aducidos anteriormente se desprende que sabemos los signos de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ en todo punto del segmento $[0, 2\pi]$ y, por consiguiente, en cualquier punto x de la recta numérica en virtud de su periodicidad de 2π. Partiendo de los valores de $S(x)$ y $C(x)$ conocidos y determinados de un solo modo en los puntos $0, \pi/2, \pi, 2\pi$ del segmento $[0, 2\pi]$ y aplicando las fórmulas que acabamos de obtener, podemos calcular de un solo modo los valores de estas funciones en todos los puntos de tipo $p\pi/2^n$ del segmento $[0, 2\pi]$ (p y n son números enteros no negativos con tal que $p \leq 2^{n+1}$). Puesto que el conjunto de puntos de tipo $p\pi/2^n$ es denso en el segmento $[0, 2\pi]$, entonces, en virtud de lo que hemos dicho al empezar la demostración de la unicidad, las funciones $S(x)$ y $C(x)$ están definidas sobre toda la recta numérica de un solo modo.

2. **Demostración de la existencia.** Demostremos la afirmación más general.

Existen las funciones $S(x)$ y $C(x)$ definidas y continuas sobre toda la recta numérica que satisfacen las exigencias:

---

*) Esta fórmula se desprende de la primera fórmula de (4.5') y del carácter impar de la función $S(x)$.

**) Basta tomar $x' = x'' = x/2$ en la segunda fórmula de (4.5') y $x/2$ en vez de x en la tercera.

1°. *Para cualesquiera números reales x', x'' y x se cumplen las relaciones*

$$\left.\begin{aligned} S(x'+x'') &= S(x')\,C(x'')+C(x')\,S(x''),\\ C(x'+x'') &= C(x')\,C(x'')-S(x')\,S(x''),\\ S^2(x)+C^2(x) &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (4.5^1)$$

2°.

$$\left.\begin{aligned} S(0)=0,\ C(0)=1,\\ S(d)=1,\ C(d)=0, \end{aligned}\right\} \qquad (4.6^1)$$

donde d es cierto número positivo dado.

3°. *Existe un número positivo L tal que, para $0 < x < d$, son válidas las desigualdades*

$$0 < S(x) < Lx \qquad (4.7^1)$$

con tal que si $d = \pi/2$, entonces $L = 1$.

DEMOSTRACIÓN. Primero, determinemos los valores de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ sobre el conjunto $\{s\}$ de puntos del segmento $[0, d]$, cada uno de los cuales puede representarse en forma de $s = \frac{pd}{2^n}$, donde p y n son números enteros no negativos con tal que $p < 2^n$. Determinemos de antemano los valores de estas funciones en los puntos $s_n = \frac{d}{2^n}$, $n = 0, 1, \ldots$ Ya que $s_{n+1} = \frac{s_n}{2}$, entonces, empleando las fórmulas (4.17), se puede poner

$$\begin{aligned} S(s_{n+1}) &= S\left(\frac{s_n}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1-C(s_n)}{2}},\\ C(s_{n+1}) &= C\left(\frac{s_n}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1+C(s_n)}{2}}. \end{aligned} \qquad (4.18)$$

Empleando las fórmulas recurrentes (4.18), de la relación $C(d) = C\left(\frac{d}{2^0}\right) = C(s_0) = 0$ se determinan los valores de $S(x)$ y $C(x)$ en todos los puntos $s_n = d/2^n$. Adicionalmente a dichos valores de $S(x)$ y $C(x)$ en los puntos s_n determinemos los valores de estas funciones en los puntos 0 y d de la misma manera como se hace en (4.6¹).

Ahora pasemos a determinar los valores de $S(x)$ y $C(x)$ en todos los puntos del conjunto $\{s\}$, $s = \frac{pd}{2^n}$, p y n son números enteros no negativos, $p < 2^n$. Se sabe que cualquier número positivo entero puede representarse de un solo modo en forma de la suma de potencias enteras del número 2*):

$$p = \sum_{i=1}^{n} a_i 2^{n-i}\ ^{**)},$$

donde a_i es igual ora a cero ora a la unidad. Por eso,

$$s = \frac{pd}{2^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i d}{2^i} = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i. \qquad (4.19)$$

*) En el sistema de numeración binario el número entero p se representa de un solo modo como símbolo compuesto de ceros y unidades. Este símbolo es denotación breve del número p en forma de la suma de potencias del número 2.

**) Véase la nota en la pág. 50.

De este modo, todo valor de s es representable en forma de la suma finita de los números s_i, para cada uno de los cuales los valores $S(s_i)$ y $C(s_i)$ fueron determinados anteriormente. Ahora, empleando las fórmulas (4.5[1]), podemos determinar los valores de $S(x)$ y $C(x)$ en los puntos del conjunto $\{s\}$. Además, debemos cerciorarnos de que, aplicando sucesivamente esas fórmulas, llegamos al mismo resultado independientemente del modo de agrupar los sumandos s_i en la fórmula (4.19).

Por ejemplo, podemos tomar $s = x' + x''$, donde $x' = a_1 s_1$ y $x'' = \sum_{i=2}^{n} a_i s_i$, y después calcular $S(s)$ por la primera fórmula de (4.5[1]). Pero se puede tomar también $x' = a_1 s_1 + a_2 s_2$ y $x'' = \sum_{i=3}^{n} a_i s_i$. Para cerciorarse de que la aplicación sucesiva de las fórmulas (4.5[1]) produce un mismo resultado independientemente del modo de agrupar los sumandos s_i en la suma (4.19), es suficiente que tengan lugar las relaciones

$$S[(x' + x'') + x'''] = S[x' + (x'' + x''')]$$

y

$$C[(x' + x'') + x'''] = C[x' + (x'' + x''')].$$

La validez de estas relaciones se demuestra directamente por medio de la doble aplicación de las fórmulas (4.5[1]).

Ahora cerciorémonos de que las funciones $S(s)$ y $C(s)$ definidas sobre el conjunto $\{s\}$ poseen la propiedad 1° en este conjunto. Sea que s', s'' y $s' + s''$ pertenecen a dicho conjunto. Representemos s', s'' y $s' + s''$ en forma de las sumas (4.19). Agrupando los números s_n (que integran s' y s'') de n iguales hasta que los s_n restantes tengan índices diferentes, llegamos al grupo de los sumandos s_n que tiene la forma de (4.19) para el número $s' + s''$. Anteriormente hemos demostrado que el resultado del cálculo de $S(s)$ o $C(s)$ de la suma de varios argumentos no depende del modo de agrupar sumandos de esta suma. Por consiguiente, si s', s'' y $s' + s''$ pertenecen al conjunto $\{s\}$, entonces los valores de $S(s)$ y $C(s)$ calculados en estos puntos satisfacen las dos primeras relaciones (4.5[1]). No es difícil convencerse de la validez de la tercera relación de (4.5[1]) para los valores mencionados del argumento. En efecto, de la definición de $S(x)$ y $C(x)$ en los puntos 0 y d se desprende que $S^2(0) + C^2(0) = 1$ y $S^2(d) + C^2(d) = 1$. De las fórmulas recurrentes (4.18) se desprende la validez de la relación $S^2(s_n) + C^2(s_n) = 1$ para todos los s_n y de la fórmula que se demuestra directamente

$$S^2(x' + x'') + C^2(x' + x'') = (S^2(x') + C^2(x'))(S^2(x'') + C^2(x''))$$

se desprende la validez de la relación $S^2(s) + C^2(s) = 1$ para todos los puntos del conjunto $\{s\}$.

Mostremos ahora que para todos los puntos del conjunto $\{s\}$ diferentes de 0 y d son válidas las desigualdades

$$0 < S(s) < 1, \quad 0 < C(s) < 1^{*}). \tag{4.20}$$

Valiéndose de la inducción demostremos la validez de las desigualdades (4.20). Para hacerlo, a todo n le ponemos en correspondencia un grupo de elementos del conjunto $\{s\}$, incluyendo en este grupo todos los elementos de $\{s\}$ que pueden representarse en la forma $\frac{pd}{2^n}$, donde $0 < p < 2^n$ y p es nú-

---

*) Recordemos que en los puntos 0 y d los valores de $S(s)$ y $C(s)$ se definen por las fórmulas (4.6[1]).

mero impar. Los elementos de este grupo se denominarán elementos de orden n. Todo elemento de orden $n+1$ está situado entre dos elementos consecuentes cuyo orden no es mayor de n y que se diferencian uno de otro en $\frac{d}{2^n}$, o sea, en s_n. El primer elemento de orden $n+1$ es igual a s_{n+1}. Todos los demás elementos de orden $n+1$ pueden obtenerse al sumar diferentes s de orden n a s_{n+1}. Calculemos los valores $S(s_1)$ y $C(s_1)$ (s_1 es el único valor de s de orden 1). De (4.18) tenemos $S(s_1)=\sqrt{1/2}$ y $C(s_1)=\sqrt{1/2}$. De este modo, para los elementos del primer grupo las desigualdades (4.20) tienen lugar. Ahora admitamos que las desigualdades (4.20) tienen lugar para todos los elementos de orden no superior a n.

Entonces, en virtud de la primera fórmula de (4.5[1]), en todos los puntos de orden $n+1$ los valores de $S(s)$ son positivos, y, en virtud de la tercera fórmula de (4.5[1]), estos valores no son mayores de la unidad. Tomando $x''=d$, $x'=-s$ en la primera fórmula de (4.5[1]), y teniendo en cuenta el carácter par de la función $C(s)$, hallamos que $C(s)=S(d-s)$, y, por eso, para $C(s)$ son válidas las desigualdades (4.20) para los valores s de orden $n+1$, puesto que si s tiene orden $n+1$, entonces $d-s$ tiene también orden $n+1$. Empleando la inducción, de aquí se desprende que para todos los puntos del conjunto $\{s\}$ diferentes de 0 y d son válidas las desigualdades (4.20).

Demostremos que las funciones $S(s)$ y $C(s)$ definidas sobre el conjunto $\{s\}$ son monótonas sobre este conjunto. A saber, mostremos que $S(s)$ es función creciente y $C(s)$, decreciente. Sea $0\leqslant s'<s''<d$. Entonces $\frac{s'+s''}{2}$ y $\frac{s''-s'}{2}$ se comprenden estrictamente entre 0 y d. De la fórmula (4.15) y de las desigualdades (4.20) se desprende que $S(s'')>S(s')$. Por consiguiente, $S(s)$ es función creciente. De la relación $C(s)=S(d-s)$ se deduce que $C(s)$ es función decreciente sobre el conjunto $\{s\}$.

Demostremos ahora que las funciones $S(s)$ y $C(s)$ definidas sobre el conjunto siempre denso $\{s\}$ de puntos del segmento [0, d] *tienen valor límite en todo punto del segmento* [0, d].

En primer lugar, consideremos la sucesión $\{s_n\}$ y mostremos que $\lim\limits_{n\to\infty} S(s_n)=0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} C(s_n)=1$ (la existencia de estos límites se desprende de la monotonía y la acotación de $S(s)$ y $C(s)$ sobre el conjunto $\{s\}$). Para demostrar consideremos la sucesión $\left\{\frac{t(s_n)}{s_n}\right\}$, donde $t(s_n)=\frac{S(s_n)}{C(s_n)}$. De (4.18) tenemos

$$2S(s_{n+1})\,C(s_{n+1})=\sqrt{1-C^2(s_n)}=S(s_n)$$

y

$$C(s_n)=C^2(s_{n+1})-S^2(s_{n+1})<C^2(s_{n+1}).$$

Por eso,

$$\frac{t(s_n)}{s_n}=\frac{S(s_n)}{s_nC(s_n)}=\frac{2S(s_{n+1})\,C(s_{n+1})}{2s_{n+1}C(s_n)}=\frac{t(s_{n+1})}{s_{n+1}}\;\frac{C^2(s_{n+1})}{C(s_n)}>\frac{t(s_{n+1})}{s_{n+1}}.$$

Así pues, $\frac{t(s_n)}{s_n}>\frac{t(s_{n+1})}{s_{n+1}}$ y $\frac{t(s_n)}{s_n}>0$ para cualquier n, o sea, la sucesión $\left\{\frac{t(s_n)}{s_n}\right\}$ es decreciente y acotada. Según el teorema 3.15, tiene límite que se denotará mediante L:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t(s_n)}{s_n}=L. \tag{4.21}$$

Ya que $s_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} t(s_n)=0$, y, por eso, en virtud del carácter acotado de la función $C(s)$ véase (4.20))

$$\lim_{n\to\infty} S(s_n)=\lim_{n\to\infty}(t(s_n)\,C(s_n))=0. \qquad (4.22)$$

Puesto que $C(s)>0$, de (4.22) y la relación $S^2(s_n)+C^2(s_n)=1$ se desprende que

$$\lim_{n\to\infty} C(s_n)=1. \qquad (4.23)$$

Notemos que de (4.21) y (4.23) se desprende que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(s_n)}{s_n}=L. \qquad (4.24)$$

Ya que $\frac{S(s_n)}{s_n}=\frac{2S(s_{n+1})\,C(s_{n+1})}{2s_{n+1}}<\frac{S(s_{n+1})}{s_{n+1}}$, entonces la sucesión $\left\{\frac{S(s_n)}{s_n}\right\}$ crece. Por eso, de (4.21), y (4.24) tenemos

$$\frac{S(s_n)}{s_n}<L<\frac{t(s_n)}{s_n}$$

o

$$S(s_n)<L\cdot s_n<t(s_n). \qquad (4.25)$$

Sea $\{s_n^*\}$ cualquier sucesión convergente a cero de valores s del conjunto $\{s\}$. Es obvio que para cualquier n se puede indicar un número k tal que $0<s_n^*<s_k$. De aquí, en virtud de la monotonía de $S(s)$ en el conjunto $\{s\}$, tenemos $0<S(s_n^*)<S(s_k)$. Por eso, de (4.22) se desprende que $\lim_{n\to\infty} S(s_n^*)=0$.

Demostremos ahora que la función $S(s)$ definida sobre el conjunto $\{s\}$ *) tiene valor límite en cualquier punto x del segmento $(0, d)$. Sea $\{s_n'\}$ sucesión monótonamente creciente convergente a x de elementos del conjunto $\{s\}$. Ya que $\{S(s_n')\}$ es sucesión acotada creciente, entonces existe el límite $\lim_{n\to\infty} S(s_n')$ que se denotará por $S(x)$. Sea $\{s_n''\}$ cualquier sucesión convergente a x de elementos del conjunto (s) $(s_n''\neq x)$. Entonces la sucesión $\left\{\left|\frac{s_n''-s_n'}{2}\right|\right\}$ tiene límite igual a cero. Según lo demostrado, $\lim_{n\to\infty} S\left\{\left|\frac{s_n''-s_n'}{2}\right|\right\}=0$. De (4.15) y la acotación de la función $C(s)$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty}|S(s_n'')-S(s_n')|=\lim_{n\to\infty} C\left(\frac{s_n''+s_n'}{2}\right)\,S\left(\left|\frac{s_n''-s_n'}{2}\right|\right)=0.$$

En otras palabras, $\lim_{n\to\infty} S(s_n'')=S(x)$. En virtud de la arbitrariedad de la sucesión $\{s_n''\}$, esto significa la existencia del valor límite de la función $S(s)$, definida sobre (s), en todo punto x del segmento $[0, d]$:

$$\lim_{s\to x} S(s)=S(x).$$

*) Recordemos que $\{s\}$ es conjunto siempre denso de los puntos del segmento $(0, d)$.

De la relación $S^2(s) + C^2(s) = 1$ y del carácter no negativo de la función $C(s)$ sobre el conjunto $\{s\}$ se desprende la existencia del valor límite de la función $C(s)$ en todo punto del segmento $[0, d]$. Denotaremos el valor límite de esta función en el punto x mediante el símbolo $C(x)$.

Definamos ahora los valores de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ en todo punto del segmento $[0, d]$ como valores límite en el punto x de las funciones $S(s)$ y $C(s)$ definidas sobre el conjunto $\{s\}$. Demostremos que las funciones $S(x)$ y $C(x)$ así definidas poseen las propiedades 1° y 2° de la afirmación enunciada al comenzar la *demostración de la existencia de las funciones $S(x)$ y $C(x)$*. Primero, argumentemos que las *funciones $S(x)$ y $C(x)$* definidas del modo mencionado anteriormente en el segmento $[0, d]$ *son monótonas y continuas* sobre este segmento. En primer lugar, demostremos que si x es cualquier número del segmento $[0, d]$ y s', s'' son cualesquiera números del conjunto $\{s\}$ que satisfacen la desigualdad $s' < x < s''$, entonces $S(s') < S(x) < S(s'')$, $C(s') > C(x) > C(s'')$. Argumentemos, por ejemplo, que $S(s') < S(x)$ (las desigualdades $S(x) < S(s'')$ y $C(s') > C(x) > C(s'')$ se demuestran análogamente). Sea $\{s'_n\}$ sucesión creciente (y convergente a x) de valores del conjunto $\{s\}$, todos elementos s'_n de la cual satisfacen las desigualdades $s' < s'_n < x$. Ya que sobre el conjunto $\{s\}$ la función $S(s)$ crece, la sucesión $\{S(s'_n) - S(s')\}$ crece y tiene elementos positivos. Por eso el límite $S(x) - S(s')$*) de esta sucesión es positivo. De este modo, $S(s') < S(x)$. Demostremos ahora que *la función $S(x)$ crece en el segmento* $[0, d]$ (de manera análoga se demuestra *el decrecimiento de la función $C(x)$ en este segmento*). Sean x' y x'' cualesquiera dos números del segmento $[0, d]$ que satisfacen la desigualdad $x' < x''$. Si s' es cierto número del conjunto $\{s\}$ comprendido entre x' y x'', $x' < s' < x''$, entonces, según lo demostrado, $S(x') < S(s')$ y $S(s') < S(x'')$, o sea $S(x') < S(x'')$. La monotonía de la función $S(x)$ sobre $[0, d]$ queda demostrada. *Antes de pasar a demostrar la continuidad de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ argumentemos que los valores límite de las funciones $S(s)$ y $C(s)$ en los puntos del conjunto $\{s\}$ coinciden con los valores de estas funciones en los puntos correspondientes del conjunto $\{s\}$.*

Consideremos un número arbitrario s del conjunto $\{s\}$ y dos sucesiones convergentes a s $\{s'_n\}$ y $\{s''_n\}$ de elementos del conjunto $\{s\}$ tales que $s'_n < s < s''_n$. En virtud de la monotonía de la función $S(s)$ sobre el conjunto $\{s\}$, son válidas las desigualdades $S(s'_n) < S(s) < S(s''_n)$**). Ya que $\lim\limits_{n\to\infty} S(s'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(s''_n)$ y dichos límites son iguales al valor límite de la función $S(s)$ en el punto s, entonces la afirmación que acabamos de enunciar quedó demostrada. Ahora, cerciorémonos de que las funciones $S(x)$ y $C(x)$ *son continuas en todo punto del segmento* $[0, d]$. Para ello, baste argumentar que estas funciones son continuas en todo punto x de dicho segmento por la izquierda y por la derecha, son continuas por la derecha en el punto 0 y por la izquierda en el punto d (véase la observación del p. 1 del § 3). Para mayor precisión, demostremos la continuidad por la izquierda de la función $S(x)$ en el punto x del segmento $[0, d]$ (la continuidad por la derecha y la continuidad de $C(x)$ se demuestran análogamente).

Sea $\{s'_k\}$ cierta sucesión (convergente a x por la izquierda) de números del conjunto $\{s\}$. Como $\lim\limits_{k\to\infty} S(s'_k) = S(x)$, para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede indicar un elemento s'_k de esta sucesión tal que, para él, $0 < S(x) - S(s'_k) < \varepsilon$. Consideremos ahora una sucesión arbitraria $\{x_n\}$ convergente a x por la izquierda.

Sea N número partiendo del cual se cumplen las desigualdades $s'_k < x_n < x$.

---

*) Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} S(s'_n) = S(x)$, y $S(s')$ es número fijado, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} [S(s'_n) - S(s')] = S(x) - S(s')$.

**) Para precisión demostramos esta afirmación para la función $S(x)$.

En virtud del crecimiento de la función, para $n \geqslant N$ se cumplen las desigualdades $S(s'_k) < S(x_n) < S(x)$. Poniéndolas en correspondencia a las desigualdades $0 < S(x) - S(s'_k) < \varepsilon$, obtenemos que, para $n \geqslant N$, son válidas las desigualdades $0 < S(x) - S(x_n) < \varepsilon$. En otras palabras, el valor límite de la función $S(x)$ en el punto x por la izquierda es igual a su valor particular en este punto. De este modo, la continuidad por la izquierda de $S(x)$ en el punto x queda demostrada.

Definemos ahora las funciones $S(x)$ y $C(x)$ en el segmento $[d, 2d]$, empleando las relaciones $S(x + d) = C(x)$ y $C(x + d) = -S(x)$. Volviendo a aplicar estas fórmulas, extendamos las funciones para el segmento $[2d, 4d]$. Repitiendo estos razonamientos, definemos las funciones para todos los valores positivos x. Para los valores negativos x definemos estas funciones empleando las relaciones $S(x) = -S(-x)$ y $C(x) = C(-x)$. Es fácil convencerse de que obtenemos como resultado las funciones continuas sobre toda la recta infinita.

Demostremos que las funciones $S(x)$ y $C(x)$ satisfacen las exigencias 1°, 2° y 3° de la afirmación enunciada al comenzar la *demostración de la existencia*. Observemos que si s', s'', $s' + s''$ y pertenecen al conjunto $\{s\}$ del segmento $[0, d]$, entonces para estos valores del argumento las fórmulas (4.5^1) tienen lugar. Empleando el procedimiento de prolongación de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ mencionado anteriormente se desprende la validez de estas fórmulas para los valores del argumento $d + s'$, s'', donde s' y s'' pertenecen al segmento $[0, d]$. Repitiendo estos razonamientos demostremos que las relaciones (4.5^1) son válidas para todos los valores del argumento de la recta infinita que tienen la forma de $pd/2^n$ donde p y n, son cualesquiera números enteros. Puesto que estos valores del argumento forman un conjunto siempre denso de puntos de la recta infinita*), en virtud de la continuidad de las funciones $S(x)$ y $C(x)$, las relaciones (4.5^1) serán válidas para todos los valores x.

Ya que la exigencia 2° resulta cumplida después de construir las funciones $S(x)$ y $C(x)$, queda por cerciorarse de la validez de la exigencia 3°. Notemos que si s', s'' y $s' + s''$ son elementos del conjunto $\{s\}$ del segmento $[0, d]$ y son válidas las desigualdades $0 < S(s') < Ls'$ y $0 < S(s'') < Ls''$, entonces en virtud de la primera fórmula de (4.5^1) y las desigualdades (4.20), se cumplen también las desigualdades $0 < S(s' + s'') < Ls' + Ls'' = L(s' + s'')$. Empleando esta observación, la fórmula (4.19) y las desigualdades (4.20) y (4.25), es fácil cerciorarse de que las desigualdades $0 < S(s) < Ls$ son válidas para todos los s del conjunto $\{s\}$ del segmento $[0, d]$. Ya que este conjunto es siempre denso sobre $[0, d]$, y $S(x)$ es función continua, entonces para todos los x de $[0, d]$ tienen lugar las desigualdades $0 < S(x) < Lx$. La validez de la exigencia 3° queda argumentada.

Observemos ahora que el número L depende del modo de escoger d. A saber, si en vez de d escogemos el número $d^* = d/k$, entonces $s_n^* = s_n/k$. Según la construcción $S(s_n^*) = S(s_n)$, y, por eso, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S(s_n^*)}{s_n^*} = \lim\limits_{n\to\infty} k\frac{S(s_n)}{s_n} = kL$ (véase (4.24)). Eligiendo $k = 1/L$, sobre el segmento $[0, d^*]$ definemos las funciones $S(x)$ y $C(x)$ de tal modo que se cumplan las desigualdades $0 < S(x) < x$.

Los razonamientos geométricos muestran que si $d = \pi/2$, entonces $2S(s_n)$ es la longitud de un lado del 2^n-ágono regular inscrito en la circunferencia de radio 1, $2s_n$ es la longitud de un arco de la circunferencia subtendida por la cuerda de longitud $2S(s_n)$, y $2t(s_n)$, la longitud de un lado del 2^n-ágono regular circunscrito alrededor de esta circunferencia. En este caso, las desigualdades (4.25) tienen la forma $S(s_n) < s_n < t(s_n)$. Por eso, en dicho caso, $L = 1$. La afirmación queda completamente demostrada.

---

*) Véase la nota en la pág. 135.

Capítulo 5

FUNDAMENTOS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

En este capítulo introducimos los conceptos de derivada y de diferencial, se definen las reglas de diferenciación, se calculan las derivadas de todas las funciones elementales más simples que hemos dado a conocer en el cap. 1. Después se consideran las derivadas y las diferenciales de órdenes superiores.

§ 1. Derivada. Sus interpretaciones física y geométrica

1. Incremento del argumento y de la función. Forma de diferencias de la condición de continuidad. Sea una función $y = f(x)$ definida sobre cierto intervalo *) (a, b). Fijemos cualquier valor x de dicho intervalo y, en el punto x, demos al argumento un incremento Δx tal que el valor $x + \Delta x$ pertenezca también al intervalo (a, b). *Se denominará incremento de la función $y = f(x)$ en el punto x, correspondiente al incremento del argumento Δx, el número*

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{5.1}$$

Así, el incremento de la función $y = \text{sen}\, x$ en el punto x, correspondiente al incremento del argumento Δx, es igual a

$$\Delta y = \text{sen}\,(x + \Delta x) - \text{sen}\, x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \text{sen}\, \frac{\Delta x}{2}. \tag{5.2}$$

Tiene lugar la siguiente afirmación: *para que la función $y = f(x)$ sea continua en el punto x es necesario y suficiente que el incremento Δy de esta función en el punto x, correspondiente al incremento del argumento Δx, sea infinitesimal cuando $\Delta x \to 0$.*

En efecto, por definición, la función $y = f(x)$ es continua en el punto x si existe el valor límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x). \tag{5.3}$$

En virtud del p. 3 del § 2 del cap. 4, la existencia del valor límite (5.3) es equivalente a que la función $[f(x + \Delta x) - f(x)]$ del argumento Δx es infinitesimal cuando $\Delta x \to 0$.

La afirmación demostrada permite expresar la condición de continuidad de la función $y = f(x)$ en el punto x en forma nueva,

---

*) En vez del intervalo (a, b) se puede considerar el segmento $[a, b]$, semirrecta, toda la recta infinita y, en general, cualquier conjunto $\{x\}$ *denso en sí*. La definición del conjunto $\{x\}$ denso en sí se da a conocer en el § 3 del cap. 2.

a saber: *la función $y=f(x)$ es continua en el punto x si el incremento Δy de esta función en el punto x, correspondiente al incremento del argumento Δx, es infinitesimal para $\Delta x \to 0$*, o sea, si

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x+\Delta x) - f(x)] = 0. \tag{5.4}$$

La condición (5.4) se denominará *forma de diferencias de la condición de continuidad de la función $y=f(x)$ en el punto x*. Esta condición se emplea mucho a continuación.

Valiéndose de la condición (5.4) volvamos a cerciorarnos de que la función $y=\operatorname{sen} x$ es continua en todo punto x de la recta infinita. En efecto, de la fórmula (5.2), la condición $\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant 1$ y la igualdad $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2} = 0$ se desprende directamente que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

2. Definición de la derivada. Continuemos empleando para la función $y=f(x)$ las suposiciones y designaciones enunciadas en el punto anterior.

Teniendo en cuenta que $\Delta x \neq 0$, consideremos, en un punto *fijado* x, la razón entre el incremento Δy de la función en este punto y el incremento correspondiente del argumento Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{5.5}$$

La razón (5.5) se denominará *relación de diferencias* (en el punto dado x). Puesto que el valor x se cree *fijado*, la relación de diferencias (5.5) es *función del argumento* Δx. Esta función está definida para todos los valores del argumento Δx pertenecientes a cierto entorno bastante pequeño del punto $\Delta x = 0$, excepto el propio punto $\Delta x = 0$. De este modo, tenemos derecho de considerar el problema de la existencia del límite de dicha función cuando $\Delta x \to 0$.

Definición. *Se denomina **derivada** de la función $y=f(x)$ en el punto fijado x el límite de la relación de diferencias para $\Delta x \to 0$,* (5.5) *(observando la condición de que este límite exista).*

La derivada de la función $y=f(x)$ en el punto x se denotará por el símbolo $y'(x)$ o $f'(x)$. Así pues, por definición,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{5.6}$$

Notemos que si la función $y=f(x)$ está definida y tiene derivada para todos los x del intervalo (a, b), esta derivada será función de la variable x también definida sobre el intervalo (a, b).

3. Derivada desde el punto de vista físico. Ya en el cap. 1 hemos introducido el concepto de derivada, partiendo de los razonamientos físicos. Aquí volvemos a estudiar las aplicaciones físicas del concepto de derivada.

Ante todo, supongamos que la función $y = f(x)$ describe la *ley del movimiento del punto material por la línea recta* (es decir, cómo depende el camino y, recorrido por el punto material del origen de referencia, respecto del tiempo x). Entonces, como se sabe, la relación de diferencias (5.5) define la velocidad media del punto en el intervalo de tiempo de x a $x + \Delta x$. En este caso, la derivada $f'(x)$, es decir, el límite de la relación de diferencias (5.5) para $\Delta x \to 0$, define la *velocidad instantánea del punto en el momento de tiempo x*. Así pues, la derivada de la función que describe la ley de movimiento define la velocidad instantánea del punto.

Para que uno no tenga la idea de que el concepto de derivada se usa ampliamente sólo en la mecánica, daremos ejemplos de aplicación del concepto de derivada en otras ramas de la física.

Sea que la función $y = f(x)$ determina la cantidad de electricidad y que pasa por la sección transversal de un conductor en el tiempo x. (El momento de tiempo $x = 0$ se toma por el origen de raferencia). En esto caso, la derivada $f'(x)$ determinará la *intensidad de la corriente* que pasa a través de la sección transversal del conductor en el momento de tiempo x.

Luego, consideremos el proceso de calentamiento de un cuerpo. Supongamos que la función $y = f(x)$ determina la cantidad de calor *) y que hay que comunicar al cuerpo para calentarlo de $0°$ a $x°$. Entonces, como se sabe del curso de la física elemental, la relación de diferencias (5.5) determina la *capacidad calorífica media* del cuerpo al calentarlo de $x°$ a $(x + \Delta x)°$. En este caso, la derivada $f'(x)$, o sea, el valor límite de la relación de diferencias (5.5) cuando $\Delta x \to 0$, determina la *capacidad calorífica del cuerpo para la temperatura dada x*. Notemos que, hablando en general, esta capacidad calorífica cambia al variar la temperatura x.

Hemos considerado ejemplos cómo se aplican los conceptos de derivada en tres distintas ramas de la física. Al estudiar el curso de la física general el lector encontrará numerosos ejemplos de aplicaciones del concepto de derivada.

4. Derivada desde el punto de vista geométrico. En el § 2 del cap. 1 hemos considerado el problema de hallar la tangente a la curva que es la gráfica de la función $y = f(x)$ (en un intervalo (a, b)). Allí hemos dado la definición de la tangente a la curva en el punto $M(x, f(x))$ de esta curva. (Aquí x es un valor del argumento en el intervalo (a, b). Véase la fig. 5.1). Si mediante Δx denotamos un incremento arbitrario del argumento y mediante P, el punto de la curva con las coordenadas $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$, entonces, la tangente que pasa por el punto M de la curva dada se define como la posición límite de la secante MP cuando $\Delta x \to 0$. En la fig. 5.1 podemos ver que el coeficiente angular de la secante MP (o sea, la

*) Expresada, por ejemplo, en calorías.

tangente del ángulo de inclinación de esta secante al eje Ox) es igual a la relación de diferencias (5.5). Empleando este dato y el hecho de que, pasando al límite para $\Delta x \to 0$, el ángulo de inclinación de la secante debe transformarse en el ángulo de la tangente, en el § 2 del cap. 1 hemos deducido basándose en razonamientos demostrativos que la *derivada* $f'(x)$ *es igual al coeficiente angular de la tangente al gráfico de la función* $y = f(x)$ *en el punto* M.

En el presente punto precisemos los razonamientos demostrativos mencionados. Al suponer que la función $y = f(x)$ tiene la derivada

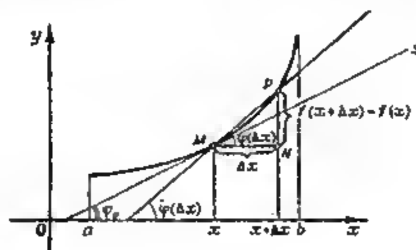


Fig. 5.1

en el punto dado x, demostremos: 1) que el gráfico de la función $y = f(x)$ tiene la tangente en el punto dado $M(x, f(x))$, 2) que el coeficiente angular de dicha tangente es igual a $f'(x)$.

Demostremos las afirmaciones 1) y 2) simultáneamente. Denotemos el ángulo de inclinación de la secante MP al eje Ox por el símbolo $\varphi(\Delta x)$. Como el coeficiente angular de la secante MP (o sea, $\operatorname{tg}\ \varphi(\Delta x)$) es igual a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, se tiene

$$\varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{5.7}$$

para cualquier Δx bastante pequeño y distinto de cero. De la existencia de la derivada $f'(x)$, es decir, de la existencia del valor límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, y de la continuidad de la función $u = \operatorname{arctg} x$ para todos los valores del argumento se desprende la existencia del valor límite de la función (5.7) en el punto $\Delta x = 0$ y la igualdad

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{arctg}\ f'(x). \tag{5.8}$$

La igualdad (5.8) demuestra la existencia del valor límite del ángulo de inclinación de la secante MP (para $\Delta x \to 0$), o sea, demuestra

la existencia de la tangente en el punto M. Además, de la igualdad (5.8) se desprende que si denotamos el ángulo de inclinación de la tangente por φ_0, entonces $\varphi_0 = \operatorname{arctg} f'(x)$, es decir, $\operatorname{tg} \varphi_0 = f'(x)$.

5. **Derivadas derecha e izquierda.** Observando la completa analogía con los conceptos de valores límite derecho e izquierdo de una función se introducen los conceptos de *derivadas derecha* e *izquierda* de la función $y = f(x)$ (en el punto dado x).

Definición. Se denomina ***derivada derecha (izquierda)*** *de la función $y = f(x)$ en el punto fijado x el valor límite derecho (izquierdo) de la relación de diferencias* (5.5) *en el punto $\Delta x = 0$ (observando la condición de que este valor límite exista).*

La derivada derecha de la función $y = f(x)$ en el punto x suele denotarse por el símbolo $f'(x + 0)$ y la izquierda, por el símbolo $f'(x - 0)$.

Si la función $y = f(x)$ tiene derivada en el punto x, ella tiene en este punto las derivadas derecha e izquierda coincidentes entre sí. Si la función $y = f(x)$ tiene derivada tanto derecha como izquierda en el punto x, y si dichas derivadas coinciden entre sí, entonces la función $y = f(x)$ tiene derivada en el punto x *). Al mismo tiempo, existen las funciones que, en el punto dado x, tienen la derivada, tanto derecha como izquierda, pero no la tienen en dicho punto. Puede servir de ejemplo la función

$$f(x) = |x| = \begin{cases} +x, & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

En el punto $x = 0$ esta función tiene la derivada derecha igual a $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$ y la izquierda igual a $\lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$, pero no tiene derivada en el punto $x = 0$.

6. **Concepto de derivada de la función vectorial.** En el análisis matemático y sus aplicaciones se encuentran con frecuencia los conceptos de la función vectorial y de su derivada.

Si a todo valor de la variable t de cierto conjunto $\{t\}$ se le pone en correspondencia, según una ley conocida, un vector determinado **a**, *entonces se dice que sobre el conjunto $\{t\}$ está prefijada función vectorial* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$.

Ya que en el sistema rectangular cartesiano dado todo vector **a** se determina unívocamente por tres coordenadas x, y y z, entonces la definición de la función vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ equivale al definir tres funciones escalares $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $z = z(t)$.

El concepto de función vectorial se hace especialmente demostrativo si examinamos el llamado *hodógrafo* de esta función.

Se denomina hodógrafo el lugar geométrico de los extremos de todos los vectores $\mathbf{a}(t)$ que parten del origen de coordenadas O. En la fig. 5.2, la curva L es hodógrafo de la función vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$.

---

*) Esta afirmación se desprende de la afirmación correspondiente para los valores límite derecho e izquierdo de la función (véase la observación del p. 1 del § 2 en el cap. 4).

El concepto de hodógrafo de la función vectorial es la generalización del concepto de la gráfica de la función escalar.

Introduzcamos el concepto de derivada de la función vectorial $\mathbf{a}(t)$ en el punto fijado t. Con este fin demos al argumento t un incremento arbitrario $\Delta t \neq 0$ y consideremos el vector $\Delta \mathbf{a} = \mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)$ (en la fig. 5.2 el vector mencionado coincide con el vector $\overrightarrow{MP}$). Multiplicando dicho vector por el número $1/\Delta t$, obtenemos nuevo vector

$$\frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)], \qquad (5.5^*)$$

colineal al anterior. El vector (5.5*) es análogo a la relación de diferencias (5.5). Notemos que el vector (5.5*) es la velocidad media de variación de la función vectorial en el segmento $[t, t + \Delta t]$.

Se llama derivada de la función vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ *en un punto fijado* t *el límite de la relación de diferencias* (5.5*) *cuando* $\Delta t \to 0$.

La derivada de la función vectorial $\mathbf{a}(t)$ se denota por el símbolo $\mathbf{a}'(t)$ o $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$.

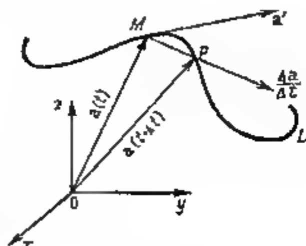


Fig. 5.2

Empleando razonamientos geométricos es obvio que la derivada de la función vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ es vector tangente al hodógrafo de esta función.

Puesto que las coordenadas de la relación de diferencias (5.5*) son, respectivamente, iguales a

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \quad \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \quad \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t},$$

está claro que las coordenadas de la derivada $\mathbf{a}'(t)$ son iguales a las derivadas de las funciones $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$. De este modo, el cálculo de la derivada de la función vectorial se reduce al cálculo de las derivadas de sus coordenadas.

OBSERVACIÓN 1. Puesto que la función vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ determina la ley del movimiento del punto material por la curva L que es hodógrafo de esta función, la derivada $\mathbf{a}'(t)$ es igual a la velocidad del movimiento por dicha curva.

OBSERVACIÓN 2. Sabemos que en la geometría analítica hay varios tipos de productos de vectores (producto escalar, producto vectorial y producto mixto). Empleando la representación en coordenadas de todos estos productos se hace posible formular reglas para calcular las derivadas de los productos correspondientes de las funciones vectoriales. A título de ejemplo, aducimos la regla para calcular la derivada del producto escalar de dos funciones vectoriales $\mathbf{a}(t) = \{a_1(t), a_2(t), a_3(t)\}$ y $\mathbf{b}(t) = \{b_1(t), b_2(t), b_3(t)\}$:

$$(\mathbf{a}(t)\,\mathbf{b}(t))' = \mathbf{a}'(t)\,\mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t)\,\mathbf{b}'(t) = \{a_1'(t)\,b_1(t) + a_2'(t)\,b_2(t) + a_3'(t)\,b_3(t)\} + \{a_1(t)\,b_1'(t) + a_2(t)\,b_2'(t) + a_3(t)\,b_3'(t)\}.$$

La regla análoga es también válida para el producto vectorial de dos funciones vectoriales:

$$[\mathbf{a}(t)\,\mathbf{b}(t)]' = [\mathbf{a}'(t)\,\mathbf{b}(t)] + [\mathbf{a}(t)\,\mathbf{b}'(t)].$$

§ 2. Concepto de diferenciabilidad de la función

1. Concepto de diferenciabilidad de la función en un punto dado. Sea la función $y = f(x)$ definida sobre un intervalo (a, b) como en los pp. 1, 2 del párrafo anterior y sea que mediante el símbolo x se denota cierto valor fijado del argumento de dicho intervalo y mediante el símbolo Δx, cualquier incremento del argumento tal que el valor del argumento $x + \Delta x$ pertenece también a (a, b).

Definición. *La función $y = f(x)$ se denomina* ***diferenciable*** *en el punto dado x si el incremento Δy de esta función en el punto x, correspondiente al incremento del argumento Δx, puede representarse en la forma*

$$\Delta y = A\,\Delta x + \alpha\Delta x, \tag{5.9}$$

donde A es un número independiente de Δx y α, función del argumento Δx que es infinitesimal cuando $\Delta x \to 0$.

Observemos que la función $\alpha(\Delta x)$ puede tomar un valor, *cualquiera que sea*, en el punto $\Delta x = 0$ (además, en este punto sigue siendo válida la representación (5.9)). Para la precisión, se puede hacer $\alpha(0) = 0$*).

Ya que el producto de dos infinitesimales $\alpha\,\Delta x$ es infinitesimal de orden superior que Δx (véase el p. 3 del § 2 del cap. 4), es decir, $\alpha\,\Delta x = o(\Delta x)$, la fórmula (5.9) puede escribirse en la forma

$$\Delta y = A\,\Delta x + o(\Delta x).$$

Teorema 5.1. *Para que la función $y = f(x)$ sea diferenciable en el punto dado x es necesario y suficiente que tenga derivada finita en este punto.*

DEMOSTRACIÓN. 1) NECESIDAD. Sea la función $y = f(x)$ diferenciable en el punto dado x, o sea su incremento Δy representable en este punto en forma (5.9). Al suponer que $\Delta x \neq 0$ y al dividir la igualdad (5.9) en Δx, obtenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha. \tag{5.10}$$

De la igualdad (5.10) se desprende la existencia de la derivada, es decir, del valor límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$.

2) SUFICIENCIA. Sea que la función $y = f(x)$ tiene derivada finita en el punto dado x, es decir, existe el valor límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x). \tag{5.11}$$

---

*) Además, el valor particular de la función $\alpha(\Delta x)$ en el punto $\Delta x = 0$ coincidirá con su valor límite en este punto.

En virtud de la definición del valor límite, la función $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$ del argumento Δx es infinitesimal cuando $\Delta x \to 0$, o sea,

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha\,\Delta x, \tag{5.12}$$

donde $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$. La representación (5.12) coincide con la (5.9) si mediante A denotamos el número $f'(x)$ independiente de Δx. Por lo tanto, queda demostrado que la función $y = f(x)$ es diferenciable en el punto x.

El teorema demostrado nos permite identificar a continuación *el concepto de diferenciabilidad de la función en un punto dado y el de la existencia de derivada en el punto dado de la función.*

En el estudio ulterior nos ponemos de acuerdo llamar *diferenciación* la operación de hallar la derivada.

2. Relación entre los conceptos de diferenciabilidad y de continuidad de una función. Tiene lugar la siguiente afirmación elemental.

Teorema 5.2. *Si la función $y = f(x)$ es diferenciable en un punto dado x, es también continua en este punto.*

DEMOSTRACIÓN. Ya que la función $y = f(x)$ es diferenciable en el punto x, entonces su incremento Δy en este punto puede representarse en la forma (5.9). Pero, de la fórmula (5.9) se desprende que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, o sea, la función $y = f(x)$ es continua en el punto x, conforme a la forma de diferencias de la condición de continuidad (véase el p. 1 del § 1). El teorema queda demostrado.

Lógicamente, surge la pregunta de si es válida o no la afirmación inversa del teorema 5.2, o sea, si se desprende de la continuidad de la función en un punto dado su diferenciabilidad en este punto. La respuesta debe ser negativa, puesto que existen funciones que son continuas en cierto punto y no son diferenciables en este punto. Como ejemplo de tal función puede servir la función $y = |x|$. Obviamente, esta función es continua en el punto $x = 0$, pero (como se ha mostrado al final del p. 5 del § 1) ella no es diferenciable en este punto. Notemos que existen funciones continuas sobre cierto segmento que no tienen derivada en ningún punto de este segmento*).

3. Concepto de diferencial de una función. Sea que la función $y = f(x)$ es diferenciable en el punto x, es decir, el incremento Δy de esta función en el punto x puede escribirse en la forma (5.9). Analizando la fórmula (5.9), deducimos que el incremento Δy de la función diferenciable es la *suma de dos sumandos*: el primero de los sumandos $A\,\Delta x$, para $A \neq 0$, es función del incremento del argumento

---

*) El primer ejemplo de esta función fue publicado por Weierstrass. Antes, independientemente de él, el matemático checo Bolzano construyó una función análoga, pero no la publicó. En el Complemento del cap. 2 del tomo 2 daremos un ejemplo de la función de este tipo.

Δx, *lineal y homogénea**) *respecto a* Δx; cuando $\Delta x \to 0$ este sumando es *infinitesimal del mismo orden que* Δx y el *segundo* sumando $\alpha \Delta x$ es *infinitesimal de orden superior a* Δx, puesto que cuando $\Delta x \to 0$ la razón $\frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \alpha$ tiende a cero. De este modo, para $A \neq 0$ el primer sumando $A\, \Delta x$ es la *parte principal* del incremento de la función diferenciable que se llama diferencial de la función en el punto x correspondiente al incremento del argumento Δx.

Así pues, en el caso de $A \neq 0$, se denomina *diferencial de la función* $y = f(x)$ *en el punto dado* x, *correspondiente al incremento del argumento* Δx, *la parte principal, lineal respecto a* Δx, *del incremento de la función en el punto* x. La diferencial de la función $y = f(x)$ suele denotarse por dy. Si para el incremento de la función Δy es válida la representación (5.9), entonces, la diferencial de esta función es, por definición, igual a

$$dy = A \cdot \Delta x. \tag{5.13}$$

En el caso de $A = 0$ el sumando $A \cdot \Delta x$ deja de ser parte principal del incremento Δy de la función diferenciable (puesto que este sumando es igual a cero mientras el sumando $\alpha \cdot \Delta x$, hablando en general, es diferente de cero). Sin embargo, nos ponemos de acuerdo que en el caso de $A = 0$ la diferencial de la función se define también por la fórmula (5.13), es decir, en este caso la diferencial se toma igual a cero.

Si tomamos en consideración el teorema 5.1, o sea, que $A = f'(x)$, entonces la fórmula (5.13) puede escribirse en la forma

$$dy = f'(x)\, \Delta x. \tag{5.14}$$

La fórmula (5.14) expresa la diferencial de la función en el punto x que corresponde al incremento del argumento Δx. Vale subrayar que, hablando en general, la diferencial de la función dy en el punto dado x no es igual al incremento de la función Δy en este punto. Es fácil comprenderlo, considerando la gráfica de la función $y = f(x)$ (fig. 5.3). Sea que en la curva $y = f(x)$ el punto M corresponde al valor del argumento x, el punto P de la misma curva, al valor del argumento $x + \Delta x$, MS es la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto M. Luego, sea que $MN \parallel Ox$, $PN \parallel Oy$, Q es punto de intersección de la tangente MS y la recta PN. Entonces el incremento de la función Δy es igual a la magnitud del segmento NP. Al mismo tiempo, del triángulo rectangular MQN y de la fórmula (5.14) está claro que la diferencial de la función dy es igual a la magnitud del segmento NQ, puesto que la magnitud del segmento MN es igual a Δx, y la tangente del ángulo $\angle QMN$ es igual a $f'(x)$. Es obvio que,

---

*) Recordemos que se denomina *función lineal* del argumento x la función de tipo $y = Ax + B$, donde A y B son constantes. En el caso de $B = 0$ la función lineal se denomina *homogénea*.

hablando en general, las magnitudes de los segmentos NP y NQ son diferentes.

Para concluir este punto, establecemos la expresión para la diferencial de la función $y = f(x)$ cuyo argumento x es *variable independiente**)*.

Introduzcamos el concepto de *diferencial dx de la variable independiente x*. Como diferencial dx de la variable independiente x puede entenderse cualquier número (independiente de x). Nos ponemos de acuerdo tomar en adelante este número igual al incremento Δx de la variable independiente**). Este acuerdo nos permite escribir la fórmula (5.14) en la forma

$$dy = f'(x)\,dx. \qquad (5.15)$$

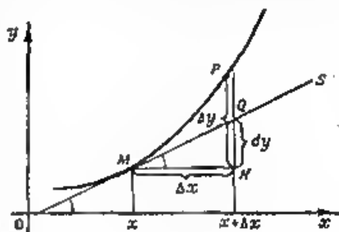


Fig. 5.3

Notemos que hasta ahora la fórmula (5.15) fue argumentada sólo para el caso cuando el argumento x es variable independiente. Sin embargo, a continuación, en el § 9, demostremos que la fórmula (5.15) queda también válida para el caso cuando el argumento x no es variable independiente, sino es función diferenciable de una variable nueva.

Mientras tanto, podemos deducir de la fórmula (5.15) lo siguiente: cuando el argumento x de la función $y = f(x)$ es variable independiente, la derivada $f'(x)$ de esta función es igual a la razón de la diferencial de la función dy a la diferencial del argumento dx, es decir,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

En el § 9 demostremos que esta relación es también válida si el propio argumento x es función diferenciable de una variable nueva.

§ 3. Reglas de diferenciación de la suma, la diferencia, el producto y el cociente

Teorema 5.3. *Si cada una de las funciones $u(x)$ y $v(x)$ es diferenciable en un punto dado x, entonces la suma, la diferencia, el producto y el cociente de estas funciones (el cociente, observando la condición de*

*) Notemos que, hablando en general, el propio argumento x de la función $y = f(x)$ puede ser función de una variable.

**) Este acuerdo se verifica al considerar la variable independiente x como la función de tipo $y = x$, para la cual $dy = dx = \Delta x$.

que $v(x) \neq 0$) *son también diferenciables en este punto con tal que tienen lugar las fórmulas*

$$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x),$$
$$[u(x)\,v(x)]' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x), \qquad (5.16)$$
$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)}.$$

DEMOSTRACIÓN Consideremos por separado los casos de la suma (diferencia), el producto y el cociente.

1°. Sea $y(x) = u(x) \pm v(x)$. Mediante los símbolos Δu, Δv y Δy denotamos los incrementos de las funciones $u(x)$, $v(x)$ e $y(x)$ en el punto dado x correspondientes al incremento del argumento Δx. Entonces, es obvio que

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = [u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)] - [u(x) \pm v(x)] = [u(x + \Delta x) - u(x)] \pm [v(x + \Delta x) - v(x)] = \Delta u \pm \Delta v.$$

De este modo, si $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}. \qquad (5.17)$$

Sea que ahora $\Delta x \to 0$. Entonces, en virtud de la existencia de las derivadas de las funciones $u(x)$ y $v(x)$ en el punto x existe el valor límite del miembro derecho de (5.17) que es igual a $u'(x) \pm v'(x)$. Por lo tanto, existe también el valor límite del miembro izquierdo de (5.17) (cuando $\Delta x \to 0$). Según la definición de la derivada, dicho valor límite es igual a $y'(x)$. Llegamos a la igualdad exigida

$$y'(x) = u'(x) \pm v'(x).$$

2°. Luego, sea $y(x) = u(x)\,v(x)$. Manteniendo para Δu, Δv y Δy el mismo sentido que anteriormente, tendremos

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = u(x + \Delta x)\,v(x + \Delta x) - u(x)\,v(x) = [u(x + \Delta x)\,v(x + \Delta x) - u(x + \Delta x)\,v(x)] + [u(x + \Delta x)\,v(x) - u(x)\,v(x)]$$

(hemos adicionado y restado el sumando $u(x + \Delta x)\,v(x)$). Luego, podemos escribir:

$$\Delta y = u(x + \Delta x)\,[v(x + \Delta x) - v(x)] + v(x)\,[u(x + \Delta x) - u(x)] = u(x + \Delta x)\,\Delta v + v(x)\,\Delta u.$$

De este modo, si $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u(x + \Delta x)\,\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x)\,\frac{\Delta u}{\Delta x}. \qquad (5.18)$$

Sea que ahora $\Delta x \to 0$. Entonces, en virtud de la diferenciabilidad de las funciones $u(x)$ y $v(x)$ en el punto x existen los valores límite de las razones $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ y $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ iguales a $u'(x)$ y $v'(x)$, respectivamente. Luego, en virtud del teorema 5.2, de la diferenciabilidad de $u(x)$ en el punto x se desprende la continuidad de $u(x)$ en este punto. Por tanto, existe el valor límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} u(x + \Delta x)$, igual a $u(x)$. De este modo, para $\Delta x \to 0$ existe el valor límite del miembro derecho de (5.18), igual a $u(x)\, v'(x) + v(x)\, u'(x)$. Por lo tanto, cuando $\Delta x \to 0$, existe también el valor límite del miembro izquierdo de (5.18). Por definición de la derivada dicho valor límite es igual a $y'(x)$. Llegamos a la fórmula exigida

$$y'(x) = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x).$$

3°. En fin, sea $y(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Entonces *),

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x+\Delta x)\, v(x) - v(x+\Delta x)\, u(x)}{v(x)\, v(x+\Delta x)}.$$

Adicionando y restando en el numerador el sumando $u(x)\, v(x)$, tendremos:

$$\Delta y = \frac{[u(x+\Delta x)\, v(x) - u(x)\, v(x)] - [v(x+\Delta x)\, u(x) - u(x)\, v(x)]}{v(x)\, v(x+\Delta x)} = \frac{v(x)\, [u(x+\Delta x) - u(x)] - u(x)\, [v(x+\Delta x) - v(x)]}{v(x)\, v(x+\Delta x)} = \frac{v(x)\, \Delta u - u(x)\, \Delta v}{v(x)\, v(x+\Delta x)}.$$

De este modo, cuando $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)\, v(x+\Delta x)}. \qquad (5.19)$$

Sea que ahora $\Delta x \to 0$. En virtud de la diferenciabilidad (así como de la continuidad que se desprende de ella) de las funciones $u(x)$ y $v(x)$ en el punto x, existen los valores límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x), \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x), \quad \lim_{\Delta x \to 0} v(x + \Delta x) = v(x).$$

*) Puesto que a continuación en el denominador figura el valor $v(x + \Delta x)$, se debe demostrar que este valor es diferente de cero *para todos los Δx bastante pequeños*. En efecto, si no fuera así, se encontraría una *sucesión infinitesimal* de valores Δx_n tal que $v(x + \Delta x_n) = 0$. Pero, ya que la función $v(x)$ es continua para el valor del argumento x, entonces de la condición $v(x + \Delta x_n) = 0$ obtendríamos que $v(x) = 0$, lo que contradice la condición del teorema.

De este modo, puesto que $v(x) \neq 0$, existe, para $\Delta x \to 0$, el valor límite del miembro derecho de (5.19) igual a

$$\frac{v(x)\,u'(x) - v'(x)\,u(x)}{v^2(x)}.$$

Por lo tanto, cuando $\Delta x \to 0$ existe también el valor límite del miembro izquierdo de (5.19). Según la definición de la derivada, dicho valor límite es igual a $y'(x)$. Obtenemos la fórmula exigida

$$y'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - v'(x)\,u(x)}{v^2(x)}.$$

El teorema 5.3 queda completamente demostrado.

§ 4. Cálculo de las derivadas de la función potencial, de las funciones trigonométricas y de la función logarítmica

En este párrafo vamos a calcular las derivadas de las funciones elementales más simples.

1. Derivada de la función potencial con el exponente entero. Comencemos por calcular la derivada de la función potencial $y = x^n$ cuyo exponente n es número positivo *entero**). El caso de la función potencial cuyo exponente es *cualquier número real* (no es obligatoriamente entero) vamos a estudiar en el § 8.

Empleando la fórmula del binomio de Newton, podemos escribir

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n =$$
$$= [x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n] - x^n =$$
$$= nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n.$$

De este modo, cuando $\Delta x \neq 0$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}. \quad (5.20)$$

Ya que en el miembro derecho de (5.20) todos los sumandos, partiendo del segundo, comprenden, en calidad del factor, Δx en potencias positivas, entonces para $\Delta x \to 0$, existe el valor límite de los sumandos mencionados igual a cero. El primer sumando del miembro derecho de (5.20) no depende de Δx. Por lo tanto, existe (cuando $\Delta x \to 0$) el valor límite del miembro derecho de (5.20) que es igual a nx^{n-1}. Según la definición de la derivada, dicho valor límite es igual a la derivada de la función $y = x^n$, o sea,

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

*) En el cap. 1 ya hemos considerado esta derivada, empleando el concepto intuitivo del límite.

Los razonamientos realizados son válidos para cualquier punto x de la recta infinita.

2. **Derivada de la función y sen x.** Empleando la fórmula de reducir la diferencia de senos a la forma conveniente para determinar logaritmos, podemos escribir:

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}.$$

De este modo, cuando $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}. \tag{5.21}$$

Ya que la función $y = \cos x$ es *continua* en cualquier punto x de la recta infinita*), entonces existe el valor límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x. \tag{5.22}$$

Luego, en virtud del resultado principal del p. 2 del § 6 del cap. 4, existe el valor límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} = 1. \tag{5.23}$$

De este modo, para $\Delta x \to 0$ existe el valor límite del miembro derecho (5.21) igual al producto de los valores límite (5.22) y (5.23), es decir, igual a $\cos x$. Según la definición de la derivada, dicho valor límite es igual a la derivada de la función $y = \operatorname{sen} x$, o sea,

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x.$$

Los razonamientos realizados son válidos para cualquier punto x de la recta infinita.

3. **Derivada de la función $y = \cos x$.** Empleando la fórmula de reducir la diferencia de cosenos a la forma conveniente para determinar logaritmos, podemos escribir:

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}.$$

De este modo, cuando $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}. \tag{5.24}$$

*) Esto fue demostrado en el p. 6 del § 5 del cap. 4. Por otra parte, es fácil demostrar la continuidad de la función $y = \cos x$ empleando la *forma de diferencias* de la condición de continuidad.

Ya que la función $y = \operatorname{sen} x$ es continua en cualquier punto x de la recta infinita, entonces existe el valor límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \operatorname{sen} x. \tag{5.25}$$

De la existencia de los valores límite (5.23) y (5.25) se desprende la existencia del valor límite del miembro derecho de (5.24) igual a $(-\operatorname{sen} x)$ cuando $\Delta x \to 0$. Según la definición de la derivada, el último valor límite es igual a la derivada de la función $y = \cos x$, o sea,

$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x.$$

Los razonamientos realizados son válidos para cualquier punto x de la recta infinita.

4. Derivadas de las funciones $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \operatorname{ctg} x$. Ya que hemos calculado las derivadas de las funciones $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ y como

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x},$$

entonces, para calcular las derivadas de las funciones $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \operatorname{ctg} x$ se puede emplear el teorema 5.3 (con mayor precisión, la fórmula que expresa la derivada del cociente, o sea, la tercera fórmula de las (5.16)).

Resulta que en todos los puntos, excepto los que tienen $\cos x = 0$,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - (\cos x)' \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Así pues,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

(para todos los valores de x, excepto $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, donde $n = 0, \pm 1, \ldots$). De manera análoga, en todos los puntos excepto los que tienen $\operatorname{sen} x = 0$,

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{(\cos x)' \operatorname{sen} x - (\operatorname{sen} x)' \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Así pues,

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$$

(para todos los valores x, excepto $x = \pi n$, donde $n = 0, \pm 1, \ldots$).

5. Derivada de la función $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$. Tomando, en calidad de x, cualquier punto de la semirrecta $x > 0$ y teniendo

en cuenta que $|\Delta x| < x$, podemos escribir

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x+\Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

De este modo, cuando $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{1/\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{x} \log_a \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right]. \quad (5.26)$$

En virtud del resultado principal del p. 3 del § 6 del cap. 4, cuando $\Delta x \to 0$, la expresión entre corchetes tiene (para cualquier x fijado) el valor límite igual a e. Entonces, basándose en la continuidad de la función $y = \log_a x$, en el punto $x = e$ existe (cuando $\Delta x \to 0$) el valor límite del miembro derecho de (5.26) igual a $\frac{1}{x} \log_a e$. Según la definición de la derivada, dicho valor límite es igual a la derivada de la función $y = \log_a x$, o sea,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$$

(para todos los valores x pertenecientes a la semirrecta $x > 0$). En el caso particular de $a = e$ obtenemos

$$(\ln x)' = 1/x.$$

§ 5. Teorema de la derivada de la función inversa

***Teorema* 5.4.** *Sea que la función $y = f(x)$ crece (o decrece) y es continua en cierto entorno del punto x_0. Sea que, además, la función $y = f(x)$ es diferenciable en el punto x_0 y la derivada $f'(x_0)$ es diferente de cero. Entonces, existe la función inversa $x = f^{-1}(y)$ que está definida en cierto entorno del punto correspondiente $y_0 = f(x_0)$, es diferenciable en este punto y tiene en él la derivada igual a $1/f'(x_0)$.*

DEMOSTRACION. Ante todo, observemos que para la función $y = f(x)$ en el entorno del punto x_0 se cumplen todas las condiciones del corolario del lema 1 en el § 4 del cap. 4. Conforme a este corolario, existe la función inversa $x = f^{-1}(y)$ definida en un entorno del punto $y_0 = f(x_0)$ y continua en este entorno. Demos al argumento y de la función inversa en el punto y_0 un incremento arbitrario Δy y *diferente de cero*. Le corresponde el incremento Δx de la función inversa con tal que, en virtud del crecimiento (o el decrecimiento) de la función, $\Delta x \neq 0$. De esta manera, tenemos derecho de escribir la siguiente identidad:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 \Big/ \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (5.27)$$

Sea que ahora en la identidad (5.27) $\Delta y \to 0$. Entonces, en virtud de la continuidad de la función inversa $x = f^{-1}(y)$ en el punto y_0 y conforme a la forma de diferencias de la condición de continuidad, se tiene también $\Delta x \to 0$.

Pero, cuando $\Delta x \to 0$, el denominador de la fracción en el miembro derecho de (5.27) tiene, por la definición de derivada, el valor límite igual a $f'(x) \neq 0$. Por lo tanto, si $\Delta y \to 0$, el miembro derecho de (5.27) tiene el valor límite igual a $\frac{1}{f'(x_0)}$. Pero entonces, el miembro izquierdo de (5.27) tiene también valor límite para $\Delta y \to 0$. Según la definición de la derivada, dicho valor límite es igual*) a $\{f^{-1}(y_0)\}'$. De este modo, hemos demostrado la diferenciabilidad de la función inversa en el punto y_0 y para su derivada hemos obtenido la relación

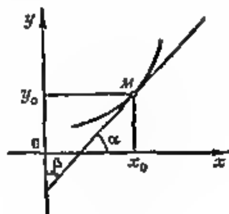


Fig. 5.4

$$\{f^{-1}(y_0)\}' = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (5.28)$$

El teorema 5.4 queda demostrado.

El teorema demostrado tiene el sentido geométrico sencillo. En el entorno del punto x_0 consideramos la gráfica de la función $y = f(x)$ (o de la función inversa). Supongamos que al punto x_0 le corresponde el punto M de esta gráfica (fig. 5.4). Entonces, obviamente, la derivada $f'(x_0)$ es igual a la tg del ángulo de inclinación α formado por la tangente, que pasa por el punto M, y el eje Ox. La derivada de la función inversa $\{f^{-1}(y_0)\}'$ es igual a la tg del ángulo de inclinación β formado por la misma tangente y el eje Oy. Puesto que la suma de los ángulos α y β es $\pi/2$, la fórmula (5.28) expresa el hecho evidente de que

$$\operatorname{tg} \beta = 1/\operatorname{tg} \alpha.$$

§ 6. Cálculo de las derivadas de la función exponencial y de las funciones trigonométricas inversas

En este párrafo, basándose en el teorema 5.4 demostrado anteriormente, continuaremos calculando las derivadas de las funciones elementales más simples.

1. Derivada de la función exponencial $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$. La función exponencial $y = a^x$ es la función inversa de la logarit-

*) Mediante el símbolo $\{f^{-1}(y_0)\}'$ denotamos la derivada de la función inversa en el punto y_0.

mica $x = \log_a y$, definida sobre la semirrecta $y > 0$. Ya que para la función logarítmica, en el entorno de cualquier punto y de la semirrecta $y > 0$, se cumplen todas las condiciones del teorema 5.4, entonces, de acuerdo con este teorema, la función $y = a^x$ es diferenciable en cualquier punto $x = \log_a y$, y para su derivada es válida la fórmula

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{1/y \log_a e} = \frac{y}{\log_a e}.$$

Empleando esta fórmula y la relación conocida del curso elemental $\log_a b = 1/\log_b a$ y teniendo en cuenta que $y = a^x$, obtenemos definitivamente

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

La fórmula obtenida es válida para todos los puntos x de la recta infinita. En el caso particular de $a = e$ esta fórmula toma la forma

$$(e^x)' = e^x.$$

2. Derivadas de las funciones trigonométricas inversas. Comencemos calculando la derivada de la función $y = \arcsen x$. Siendo definida sobre el intervalo $-1 < x < +1$, esta función es la inversa de la función $x = \operatorname{sen} y$ definida sobre el intervalo $-\pi/2 < y < +\pi/2$. Ya que para la función $x = \operatorname{sen} y$, en el entorno de cualquier punto y del intervalo $-\pi/2 < y < \pi/2$, se cumplen todas las condiciones del teorema 5.4, entonces, según este teorema, la función $y = \arcsen x$ es diferenciable en cualquier punto $x = \operatorname{sen} y$, y para su derivada es válida la fórmula

$$(\arcsen x)' = \frac{1}{(\operatorname{sen} y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}}. \qquad (5.29)$$

Hemos puesto el signo + delante de la raíz porque $\cos y$ es positivo en todo el intervalo $-\pi/2 < y < \pi/2$. Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} y = x$, de la fórmula (5.29) obtenemos definitivamente

$$(\arcsen x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Como ya hemos notado en el proceso de la deducción, la fórmula obtenida es válida para todos los x del intervalo $-1 < x < +1$. De la manera análoga se calcula la derivada de la función $y = \arccos x$. Esta función, siendo definida sobre el intervalo $-1 < x < +1$, es la inversa de la función $x = \cos y$ definida sobre el intervalo $0 < y < \pi$. Puesto que para la función $x = \cos y$, en el entorno de cualquier punto y del intervalo $0 < y < \pi$, se cumplen todas las condiciones del teorema 5.4, entonces, según este teorema, la función $y = \arccos x$ es diferenciable en cualquier punto $x =$

$= \cos y$, y para su derivada es válida la fórmula

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\operatorname{sen} y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}. \qquad (5.30)$$

Hemos tomado en consideración que $\operatorname{sen} y = +\sqrt{1-\cos^2 y}$, ya que $\operatorname{sen} y > 0$ en todo el intervalo $0 < y < \pi$. Teniendo en cuenta que $\cos y = x$, de la fórmula (5.30) obtenemos definitivamente

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Como ya hemos notado en el proceso de la deducción, la fórmula obtenida es válida para todos los valores x del intervalo $-1 < x < 1$.

Pasamos a calcular la derivada de la función $y = \operatorname{arctg} x$. Siendo definida sobre toda la recta infinita $-\infty < x < +\infty$, dicha función es la función inversa de la $x = \operatorname{tg} y$, definida sobre el intervalo $-\pi/2 < y < \pi/2$. Ya que para la función $x = \operatorname{tg} y$ en el entorno de cualquier punto y del intervalo $-\pi/2 < y < \pi/2$ se cumplen todas las condiciones del teorema 5.4, entonces, según este teorema, la función $y = \operatorname{arctg} x$ es diferenciable en cualquier punto $x = \operatorname{tg} y$ y para su derivada es válida la fórmula

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}.$$

Teniendo en cuenta que $\operatorname{tg} y = x$, obtenemos definitivamente

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

La fórmula obtenida es válida para todos los puntos x de la recta infinita.

Queda por calcular la derivada de la función $y = \operatorname{arcctg} x$. Siendo definida sobre la recta infinita $-\infty < x < +\infty$, esta función es la función inversa de la $x = \operatorname{ctg} y$, definida sobre el intervalo $0 < y < \pi$. Ya que para la función $x = \operatorname{ctg} y$ en el entorno de cualquier punto y del intervalo $0 < y < \pi$ se cumplen todas las condiciones del teorema 5.4, entonces, según este teorema, la función $y = \operatorname{arcctg} x$ es diferenciable en cualquier punto $x = \operatorname{ctg} y$ y para su derivada es válida la fórmula

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y}.$$

Teniendo en cuenta que $\operatorname{ctg} y = x$, obtenemos definitivamente

$$(\operatorname{arccrg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Esta fórmula es válida para todos los puntos x de la recta infinita.

De este modo, hemos calculado las derivadas de todas las funciones elementales más simples, excepto la función potencial de cualquier exponente real.

Calculamos la derivada de la última función en el § 8 y ahora argumentemos las reglas de diferenciación de la función compuesta.

§ 7. Regla de diferenciación de la función compuesta

En el presente párrafo planteamos el objetivo de establecer la regla que permite hallar la derivada de la función $y = f[\varphi(t)]$ si se conocen las derivadas de las funciones que la integran $y = f(x)$ y $x = \varphi(t)$.

Teorema 5.5. *Sea que la función $x = \varphi(t)$ es diferenciable en un punto t_0 y la función $y = f(x)$ es diferenciable en el punto correspondiente $x_0 = \varphi(t_0)$. Entonces, la función compuesta $f[\varphi(t)]$ es diferenciable en dicho punto t_0 con tal que para la derivada de esta función es válida la siguiente fórmula*):*

$$\{f[\varphi(t_0)]\}' = f'(x_0)\,\varphi'(t_0). \tag{5.31}$$

DEMOSTRACION. Demos al argumento t, en el punto t_0, un incremento arbitrario Δt *diferente de cero*. Le corresponde un incremento Δx de la función $x = \varphi(t)$. A su vez, al incremento Δx le corresponde el incremento Δy de la función $y = f(x)$ en el punto x_0. Ya que se supone que la función $y = f(x)$ es diferenciable en el punto x_0, el incremento de esta función en el punto x_0 puede escribirse en la forma (véase el § 2)

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha\,\Delta x, \tag{5.32}$$

donde

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha = 0.$$

Al dividir la igualdad (5.32) por Δt, tendremos

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x_0)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \alpha\frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{5.33}$$

Sea ahora que en la igualdad (5.33) $\Delta t \to 0$. Ya que de la diferenciabilidad de la función $x = \varphi(t)$ en el punto t_0 se desprende su continuidad en este punto, entonces, en virtud de la forma de diferencias de la condición de continuidad, $\Delta x \to 0$ (para $\Delta t \to 0$). Por eso se puede afirmar que existe valor límite

$$\lim_{\Delta t\to 0}\alpha = 0. \tag{5.34}$$

*) Mediante $\{f[\varphi(t_0)]\}'$ denotamos la derivada de la función compuesta $y = f[\varphi(t)]$ en el punto $t = t_0$.

Además, conforme a la exigencia de la diferenciabilidad de la función $x = \varphi(t)$ en el punto t_0, existe el valor límite

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi'(t_0). \tag{5.35}$$

La existencia de los valores límite (5.34) y (5.35) asegura la existencia del valor límite del miembro derecho de (5.33), igual a $f'(x_0) \times \times \varphi'(t_0)$ cuando $\Delta t \to 0$. Por lo tanto, existe también el valor límite del miembro izquierdo de (5.33) para $\Delta t \to 0$. Según la definición de la derivada, dicho valor límite es igual a la derivada de la función compuesta $f[\varphi(t)]$ en el punto t_0. Por tanto, hemos demostrado la diferenciabilidad de la función compuesta en el punto t_0 y la fórmula (5.31).

El teorema 5.5 queda demostrado.

OBSERVACIÓN. Consideramos la función compuesta $y = f(x)$, donde $x = \varphi(t)$, es decir, tomamos x como el argumento intermedio y t, como el argumento final. Por supuesto, se puede cambiar estas denotaciones. Frecuentemente, es más conveniente considerar la función compuesta de tipo $y = f(u)$, donde $u = \varphi(x)$, o sea, tomar x como el argumento final y una variable u, como el intermedio. Para esta función la fórmula de diferenciación (5.31) toma la forma

$$y' = \{f[\varphi(x)]\}' = f'(u)\,\varphi'(x) \tag{5.36}$$

(para los valores correspondientes de los argumentos x y u hemos omitido los ceros que son de carácter auxiliar).

Daremos ejemplos para emplear la regla de diferenciación de la función compuesta que acabamos de demostrar.

1°. Calcúlese la derivada de la función $y = e$ arctg x. Consideraremos esta función como la compuesta de tipo $y = e^u$, cuando $u = \operatorname{arctg} x$. Empleando la fórmula (5.36), obtenemos

$$y' = (e^u)'(\operatorname{arctg} x)' = e^u \frac{1}{1+x^2} = e^{\operatorname{arctg} x} \frac{1}{1+x^2}.$$

2°. Calcúlese la derivada de la función $y = 2^{x^2}$. Consideraremos esta función como la compuesta de tipo $y = 2^u$, donde $u = x^2$. Empleando la fórmula (5.36), obtenemos

$$y' = (2^u)'(x^2)' = (2^u \ln 2)\, 2x = 2^{x^2+1} x \ln 2.$$

3°. Considerando los dos ejemplos mencionados, escribimos por separado las funciones que integran la función compuesta. Naturalmente, no es necesario hacerlo. En la práctica la diferenciación de la función compuesta se hace inmediatamente sin separarla en las funciones integrantes. Por ejemplo,

$$y = \operatorname{arcsen} 75x;\ y' = \frac{1}{\sqrt{1-(75x)^2}}(75x)' = \frac{75}{\sqrt{1-(75x)^2}} \text{ (aquí } |x| < 1/75).$$

4°. El teorema 5.5 y la regla contenida en él puede transferirse consecuentemente para el caso de la función compuesta que es la superposición de tres y más funciones.

Consideremos un ejemplo de tal función. Sea que se exige calcular la derivada de la función $y = 5^{\operatorname{arcctg}(x^8)}$. Aplicando sucesivamente la regla de diferenciación de la función, obtenemos

$$y = (5^{\operatorname{arcctg}(x^8)} \ln 5) \frac{(-1)}{1+x^{16}} 8x^7.$$

§ 8. Derivada logarítmica. Derivada de una función potencial con cualquier exponente real. Tabla de derivadas de las funciones elementales más simples

1. Concepto de derivada logarítmica de una función. Sea que una función $y = f(x)$ es *positiva* y diferenciable en un punto dado x. Entonces, en este punto existe $\ln y = \ln f(x)$. Considerando $\ln f(x)$ como la función compuesta del argumento x, podemos calcular la derivada de esta función en el punto dado x, tomando $y = f(x)$ por el argumento intermedio. Obtenemos

$$[\ln f(x)]' = y'/y. \tag{5.37}$$

La magnitud definida por la fórmula (5.37) se denomina *derivada logarítmica* de la función $y = f(x)$ en el punto dado x. A título de ejemplo, calculemos la derivada logarítmica de la llamada función potencial-exponencial $y = u(x)^{v(x)}$. Del p. 2 del § 7 cap. 4, sabemos que esta función está definida y es continua para todos los valores x, para los cuales $u(x)$ y $v(x)$ son continuas y $u(x) > 0$. Ahora planteamos adicionalmente que $u(x)$ y $v(x)$ sean diferenciables para los valores considerados x. Entonces, ya que $\ln y = v(x) \ln u(x)$, obtenemos que la derivada logarítmica de la función considerada es igual a

$$\frac{y'}{y} = [v(x) \ln u(x)]' = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}. \tag{5.38}$$

De la igualdad (5.38), teniendo en cuenta que $y = u(x)^{v(x)}$, obtenemos la siguiente fórmula para la derivada de la función potencial-exponencial:

$$y' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right].$$

2. Derivada de una función potencial de cualquier exponente real. Ahora vamos a calcular la derivada de la función potencial $y = x^\alpha$ de exponente real arbitrario α. Calculamos la derivada de esta función para los valores x, para los cuales la función está definida para cualquier α, a saber, para los valores x pertenecientes a la

semirrecta*) $x > 0$. Teniendo en cuenta que en toda la semirrecta $x > 0$ la función $y = x^\alpha$ es *positiva*, calculemos la derivada logarítmica de esta función. Puesto que $\ln y = \alpha \ln x$, la derivada logarítmica es igual a

$$\frac{y'}{y} = [\alpha \ln x]' = \frac{\alpha}{x}.$$

De aquí, tomando en consideración que $y = x^\alpha$, obtenemos la fórmula para una función potencial arbitraria

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

De este modo, hemos calculado las derivadas de todas las funciones elementales más simples. Agrupando todas las derivadas calculadas, obtenemos la siguiente tabla que ya hemos reproducido en el cap. 1.

3. Tabla de las derivadas de las funciones elementales más simples.

1°. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. En particular, $(1/x)' = -1/x^2$, $(\sqrt{x})' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$.

2°. $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e \; (x > 0,\ 0 < a = 1)$.

En particular, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

3°. $(a^x)' = a^x \ln a \; (0 < a \neq 1)$. En particular, $(e^x)' = e^x$.

4°. $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

5°. $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.

6°. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \; \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \text{ donde } n = 0, \pm 1, \ldots\right)$.

7°. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x) \; (x \neq \pi n, \text{ donde } n = 0, \pm 1, \ldots)$.

8°. $(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \; (-1 < x < 1)$.

9°. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \; (-1 < x < 1)$.

10°. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

11°. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

---

*) En el caso de $\alpha = 1/m$, donde m es número impar entero, la función $y = x^\alpha$ está definida *sobre toda la recta infinita*. Sin embargo, en este caso es también suficiente calcular la derivada de la función mencionada solamente para los valores $x > 0$, puesto que dicha función es *impar* y haciendo este razonamiento es fácil obtener su derivada para los valores $x < 0$.

En el § 4 del cap. 4 hemos introducido las funciones hiperbólicas $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x$ e $y = \operatorname{cth} x$ que son combinaciones simples de funciones exponenciales. De la definición de estas funciones se desprenden fácilmente las siguientes expresiones para sus derivadas:

12°. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

13°. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

14°. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

15°. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \quad (x \neq 0)$.

Las reglas de diferenciación de la suma, la diferencia, el producto y el cociente (es decir, con las fórmulas (5.16)) la regla de diferenciación de la función compuesta y la tabla mencionada son la base del cálculo diferencial.

Las reglas establecidas y las fórmulas de diferenciación permiten hacer una deducción importante.

En el § 7 del cap. 4 hemos introducido el concepto de la *función elemental* como una función que se representa por las funciones elementales más simples haciendo las cuatro operaciones aritméticas y las superposiciones aplicadas sucesivamente un número finito de veces. Ahora podemos afirmar que la *derivada de cualquier función elemental es también función elemental.* De este modo, *la operación de diferenciación no nos deja salir de la clase de las funciones elementales.*

§ 9. Invariación de la forma de la primera diferencial. Algunas aplicaciones de la diferencial

1. Invariación de la forma de la primera diferencial. En la parte final del § 2 hemos establecido que para el caso cuando el argumento x es *variable independiente*, la diferencial de la función $y = f(x)$ se determina por la fórmula

$$dy = f'(x)\,dx. \tag{5.39}$$

En este punto demostremos que la fórmula (5.39) es universal y válida no sólo en el caso cuando el argumento x es variable independiente sino también cuando el mismo argumento x es función diferenciable de una nueva variable t. La propiedad mencionada de la diferencial de la función suele llamarse *invariación de su forma.*

Así pues, sea dada una función $y = f(x)$ diferenciable en un punto x cuyo argumento x es función diferenciable $x = \varphi(t)$ del argumento t. En este caso, podemos considerar *y como la función compuesta $y = f[\varphi(t)]$* del argumento t y x, como el argumento intermedio. En virtud del teorema 5.5 la derivada de y respecto a t se determina por la fórmula

$$y' = f'(x)\,\varphi'(t). \tag{5.40}$$

Puesto que la variable t puede considerarse como *independiente*, las derivadas de las funciones $x = \varphi(t)$ e $y = f[\varphi(t)]$ respecto al argumento t son iguales a las razones de las diferenciales de estas funciones y dt (según lo establecido al final del § 2), o sea,

$$\varphi'(t) = \frac{dx}{dt}, \; y' = \{f[\varphi(t)]\}' = \frac{dy}{dt}.$$

Poniendo estos valores de las derivadas en la fórmula (5.40), le daremos la forma de

$$\frac{dy}{dt} = f'(x)\,\frac{dx}{dt}. \qquad (5.41)$$

Multiplicando los dos miembros de la igualdad (5.41) por dt, para dy obtenemos la expresión (5.39). Por tanto, queda demostrada la invariación de la forma de la primera diferencial de la función, es decir, queda demostrado que, *tanto en el caso cuando el argumento x es variable independiente, como en el caso cuando el propio x es función diferenciable de otra variable, la diferencial dy de la función $y = f(x)$ es igual a la derivada de esta función multiplicada por la diferencial del argumento dx.*

En otras palabras, la propiedad de la invariación de la diferencial puede enunciarse del modo siguiente: *la derivada de la función $y = f(x)$ es siempre*) igual a la razón de la diferencial de esta función dy y la diferencial del argumento dx, o sea,*

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}. \qquad (5.42)$$

La igualdad demostrada (5.42) nos permite emplear a continuación la razón dy/dx para designar la derivada de la función $y = f(x)$ respecto al argumento x.

Para concluir, observemos que después de haber demostrado la igualdad (5.42), la regla de diferenciación de la función compuesta toma la forma de la identidad simple:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt}. \qquad (5.43)$$

La forma sencilla adquiere también la regla de diferenciación de la función inversa:

$$\frac{dy}{dx} = 1 \Big/ \frac{dx}{dy}. \qquad (5.44)$$

Sin embargo, subrayemos que las igualdades (5.43) y (5.44) no pueden considerarse como nuevos métodos para demostrar los teoremas 5.5

*) Es decir, tanto en el caso cuando el argumento x es variable independiente como en el caso cuando el propio x es función diferenciable de alguna otra variable.

y 5.4, puesto que en las fórmulas (5.43) y (5.44) se emplea esencialmente la invariación de la primera diferencial que fue establecida precisamente valiéndose del teorema 5.5.

2. Fórmulas y reglas de cálculo de las diferenciales. Hemos demostrado que la diferencial dy de la función $y = f(x)$ es siempre igual a la derivada de esta función $f'(x)$ multiplicada por la diferencial del argumento dx. De este modo, la tabla de las derivadas del p. 3 del § 8 nos permite confeccionar la correspondiente tabla de las diferenciales:

1°. $d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}\,dx$. En particular, $d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2}$, $d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

2°. $d(\log_a x) = \frac{\log_a e}{x}\,dx \quad (x > 0,\ 0 < a \neq 1)$.

En particular, $d(\ln x) = dx/x$.

3°. $d(a^x) = a^x \ln a\,dx\ (0 < a + 1)$. En particular, $d(e^x) = e^x\,dx$.

4°. $d(\operatorname{sen} x) = \cos x\,dx$.

5°. $d(\cos x) = -\operatorname{sen} x\,dx$.

6°. $d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\right.$ donde $n = 0, \pm 1, \ldots\left.\right)$.

7°. $d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)\,dx\ (x \neq \pi n,$ donde $n = 0, \pm 1, \ldots)$.

8°. $d(\operatorname{arcsen} x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1 < x < 1)$.

9°. $d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1 < x < 1)$.

10°. $d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2}$.

11°. $d(\operatorname{arcctg} x = -\frac{dx}{1+x^2}$.

Valiéndose de las fórmulas (5.16) y de la relación (5.39) se deducen directamente las siguientes reglas para calcular la diferencial de la suma, la diferencia, el producto y el cociente:

$$d(u \pm v) = du \pm dv,\ d(uv) = v\,du + u\,dv,\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

3. Empleo de la diferencial para deducir fórmulas aproximadas. Aunque, como hemos visto en el § 2, la diferencial dy de la función $y = f(x)$ no es igual al incremento Δy de esta función, pero, con exactitud de hasta una infinitesimal de orden superior que Δx, es

válida la igualdad aproximada

$$\Delta y \approx dy. \tag{5.45}$$

El error relativo*) de esta igualdad se hace cualquier pequeño que sea para Δx bastante pequeño. La fórmula (5.45) permite sustituir aproximadamente el incremento Δy de la función $y = f(x)$ por su diferencial dy. La ventaja de esta sustitución consiste en que la diferencial dy depende linealmente de Δx mientras, hablando en general, el incremento Δy es función más compleja de Δx.

Teniendo en cuenta que el incremento de la función Δy se determina por la fórmula (5.1) y la diferencial dy, por la fórmula (5.14), daremos a la igualdad aproximada (5.45) la forma siguiente:

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\, \Delta x$$

ó

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\, \Delta x. \tag{5.46}$$

Según la fórmula (5.46), para los valores del argumento próximos a x (o sea, para Δx pequeños) la función f se sustituye aproximadamente por una función lineal.

En particular, de la fórmula (5.46) se puede obtener una serie de fórmulas aproximadas ya conocidas (véase el § 4). Así, poniendo $f(x) = (1 + x)^{1/n}$, $x = 0$, obtenemos que

$$(1 + \Delta x)^{1/n} \approx 1 + \Delta x/n. \tag{5.47}$$

Tomando $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x = 0$, obtenemos

$$\operatorname{sen} \Delta x \approx \Delta x. \tag{5.48}$$

Haciendo $f(x) = e^x$, $x = 0$, obtenemos

$$e^{\Delta x} \approx 1 + \Delta x. \tag{5.49}$$

Tomando $f(x) = \ln(1 + x)$, $x = 0$, obtenemos

$$\ln(1 + \Delta x) \approx \Delta x. \tag{5.50}$$

Cada una de las igualdades (5.47)—(5.50) es válida con exactitud de hasta una infinitesimal de orden superior que Δx.

Las igualdades (5.47)—(5.50) en la forma de estimaciones exactas ya fueron establecidas en la parte final del § 7 del cap. 4.

---

*) El error relativo de la igualdad (5.45) se determina por la razón $\frac{\Delta y - dy}{\Delta x}$. Notemos que, según la definición de la diferencial, $\Delta y - dy = O(\Delta x)$.

§ 10. Derivadas y diferenciales de órdenes superiores

1. Concepto de derivada de n-ésimo orden. Como hemos notado en el p. 2 del § 1, la derivada $f'(x)$ de la función $y = f(x)$, definida y diferenciable sobre el intervalo (a, b), es *también función definida sobre el intervalo* (a, b). Puede ocurrir que la propia función $f'(x)$ es diferenciable en cierto punto del intervalo (a, b), o sea, tiene derivada en este punto. Entonces, la derivada mencionada se denomina *segunda derivada* (o derivada de segundo orden) de la función $y = f(x)$ en el punto x y se denota por el símbolo $f^{(2)}(x)$ ó $y^{(2)}(x)$*).

Después de haber introducido el concepto de segunda derivada se puede introducir sucesivamente el concepto de tercera derivada, luego, de cuarta derivada, etc. Si suponemos que ya hemos introducido el concepto de $(n-1)$-ésima derivada y que esta última es diferenciable en cierto punto x del intervalo (a, b), o sea, tiene derivada en este punto, entonces, la derivada mencionada se denomina *n-ésima derivada* (*o derivada de n-ésimo orden*) de la función $y = f(x)$ en el punto x y se denota por el símbolo $f^{(n)}(x)$ ó $y^{(n)}(x)$.

De este modo, introducimos el concepto de n-ésima derivada por inducción, pasando de la primera derivada a las sucesivas. La relación que determina la n-ésima derivada tiene la forma

$$y^{n} = [y^{n-1}]'. \tag{5.51}$$

La función que sobre el conjunto dado $\{x\}$ tiene derivada finita de orden n suele llamarse n veces diferenciable sobre este conjunto. En la física, el concepto de las derivadas de órdenes superiores se aplica en muchos casos. Aquí nos limitemos a señalar el sentido mecánico de la segunda derivada. Si la función $y = f(x)$ describe la ley del movimiento del punto material por la línea recta, entonces, como ya lo sabemos, la primera derivada $f'(x)$ es la velocidad instantánea del punto móvil en el momento del tiempo x. En este caso, la segunda derivada $f^{(2)}(x)$ es igual a la *velocidad de variación de velocidad*, o sea, es igual a la *aceleración* del punto móvil en el momento de tiempo x.

Observemos que los métodos de calcular derivadas de órdenes superiores presuponen los hábitos para calcular *solamente derivadas de primer orden*. Como ejemplo calculemos las derivadas de n-ésima orden de algunas funciones elementales más simples.

2. **n-ésimas derivadas de algunas funciones.** 1°. Calculemos la n-ésima derivada de la función potencial $y = x^{\alpha}$ ($x > 0$, α es cualquier número real). Diferenciando sucesivamente, tendremos

$$y' = \alpha x^{\alpha-1},\ y^{(2)} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},$$
$$y^{(3)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}, \ \ldots$$

---

*) La segunda derivada de la función $y=f(x)$ se denota también por el símbolo $f''(x)$ o $y''(x)$.

De aquí, es fácil entender la ley general

$$(x^{\alpha})^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)\,x^{\alpha-n}.$$

La demostración estricta de esta ley se realiza fácilmente por el método de inducción.

En caso particular, $\alpha = m$, donde m es número natural, obtenemos

$$(x^m)^{(m)} = m!,\quad (x^m)^{(n)} = 0,\ \text{si}\ n > m.$$

De este modo, la n-ésima derivada del polinomio de orden m es igual a cero cuando $n > m$*).

2°. Luego, calculemos la n-ésima derivada de la función exponencial $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$. Diferenciando sucesivamente, tendremos

$$y' = a^x \ln a,\ y^{(2)} = a^x \ln^2 a,\ y^{(3)} = a^x \ln^3 a,\ \ldots$$

La fórmula general que se establece fácilmente por el método de inducción, tiene la forma

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a.$$

En particular,

$$(e^x)^{(n)} = e^x.$$

3°. Calculemos la n-ésima derivada de la función $y = \operatorname{sen} x$. La primera derivada de esta función puede escribirse en la forma $y' = \cos x = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$. De este modo, la *diferenciación de la función $y = \operatorname{sen} x$ suma al argumento de esta función el valor* $\pi/2$. De aquí obtenemos la fórmula

$$(\operatorname{sen} x)^{(n)} = \operatorname{sen}(x + n\pi/2).$$

4°. De manera completamente análoga se deduce la fórmula

$$(\cos x)^{m} = \cos(x + n\pi/2).$$

5°. Para concluir, calculemos la n-ésima derivada de la llamada *función lineal fraccional* $y = ax + b/cx + d$, donde a, b, c y d son ciertas constantes. Diferenciando sucesivamente esta función, tendremos

$$y' = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = (ad - bc)(cx+d)^{-2},$$

$$y^{(2)} = (ad - bc)(-2)(cx+d)^{-3}c,$$

$$y^{(3)} = (ad - bc)(-2)(-3)(cx+d)^{4}c^2,\ \ldots$$

---

*) Al mismo tiempo, empleamos también la siguiente fórmula evidente $[Au(x) + Bv(x)]^{(n)} = Au^{(n)}(x) + Bv^{(n)}(x)$, donde A y B son constantes.

Es también fácil establecer la ley general

$$y^{(n)} = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{(n)} = (ad-bc)(-1)^{n-1}\, n!\,(cx+d)^{-(n+1)}\, c^{n-1}$$

que puede argumentarse por el método de inducción.

3. Fórmula de Leibniz para la n-ésima derivada del producto de dos funciones. Mientras la regla establecida anteriormente para calcular la primera derivada de la suma o la diferencia de dos funciones $(u \pm v)' = u' \pm v'$ se transfiere fácilmente (por ejemplo, por el método de inducción) al caso de la n-ésima derivada $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$, surgen grandes dificultades para calcular la n-ésima derivada del producto de dos funciones uv.

La regla correspondiente se llama *fórmula de Leibniz* y tiene la forma siguiente:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + C_n^2 u^{(n-2)} v^{(2)} + C_n^3 u^{(n-3)} v^{(3)} + \ldots + uv^{(n)}. \quad (5.52)$$

Es fácil darse cuenta de la ley según la cual se construye el miembro derecho de la fórmula de Leibniz (5.52): *éste coincide con la fórmula del desarrollo del binomio $(u+v)^n$ con la particularidad de que en vez de las potencias de u y v se ponen las derivadas de órdenes correspondientes.* Se hacen más parecidos si en lugar de las propias funciones u y v se escriben respectivamente $u^{(0)}$ y $v^{(0)}$ (o sea, si la propia función se considera como la derivada de orden nulo).

Demostremos la fórmula de Leibniz por el método de inducción. Si $n = 1$, la fórmula toma la forma $(uv)' = u'v + uv'$, lo que coincide con la regla de diferenciación del producto de dos funciones establecida anteriormente (en el § 3). Por eso, al suponer la validez de la fórmula (5.52) para cierto número n, basta demostrar su validez para el número siguiente $n+1$. Así pues, sea que para un número n la fórmula (5.52) es válida. Diferenciemos esta fórmula y unamos los sumandos situados en el miembro derecho de tal modo como se da a continuación:

$$(uv)^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + [C_n^0 u^{(n)}v' + C_n^1 u^{(n)}v'] + [C_n^1 u^{(n-1)}v^{(2)} + C_n^2 u^{(n-1)}v^{(2)}] + [C_n^2 u^{(n-2)}v^{(3)} + C_n^3 u^{(n-2)}v^{(3)}] + \ldots + uv^{(n+1)}. \quad (5.53)$$

(Hemos empleado el hecho de que $1 = C_n^0$.) De las matemáticas elementales sabemos que para cualquier número k no superior a n es válida la fórmula*)

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k.$$

*) Además, la fórmula se verifica elementalmente.

Empleando esta fórmula, podemos escribir la igualdad (5.53) del modo siguiente:

$$(uv)^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + C^1_{n+1}u^{(n)}v' + C^2_{n+1}u^{(n-1)}v^{(2)} + \ldots uv^{(n+1)}.$$

Por lo tanto queda demostrada la validez de la fórmula (5.52) para el número $(n + 1)$. La deducción de la fórmula de Leibniz ha terminado.

EJEMPLO 1. Calculemos la n-ésima derivada de la función $y = x^2 \cos x$. Empleemos la fórmula de Leibniz, poniendo $u = \cos x$, $v = x^2$. En este caso, para cualquier número k, $u^{(k)} = \cos(x + k\pi/2)$, $v' = 2x$, $v^{(2)} = 2$, $v^{(3)} = v^{(4)} = \ldots = 0$. Obtenemos

$$y^{n} = x^2 \cos(x + n\pi/2) + 2nx \cos[x + (n-1)\pi/2] + n(n-1)\cos[x + (n-2)\pi/2].$$

EJEMPLO 2. Calculemos la n-ésima derivada de la función $y = x^3e^x$. Empleemos la fórmula de Leibniz, poniendo $u = e^x$, $v = x^3$. Entonces, para cualquier número k, $u^{(k)} = e^x$, $v' = 3x^2$, $v^{(2)} = 6x$, $v^{(3)} = 6$, $v^{(4)} = v^{(5)} = \ldots = 0$. Obtenemos

$$y^{n} = (x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2))e^x.$$

Los ejemplos considerados muestran que la fórmula de Leibniz es especialmente eficaz en el caso cuando una de las dos funciones multiplicadas tiene *solamente un número finito de derivadas diferentes de cero.*

4. Diferenciales de órdenes superiores. En los razonamientos del presente punto empleamos el símbolo δ a la par con el símbolo d para designar la diferencial (es decir, escribiremos los símbolos δx y δy en vez de dx y dy donde es conveniente).

Supongamos que la función $y = f(x)$ es diferenciable en cierto entorno del punto x_0. Entonces, la primera diferencial dy de esta función tiene la forma*) $dy = f'(x)\,dx$ y es función de dos variables: del punto x y de la magnitud dx.

Supongamos adicionalmente que la función $f'(x)$ es también diferenciable en el punto x_0 y que la magnitud dx tiene un mismo valor fijado para todos los puntos x en el entorno considerado del punto x_0.

Haciendo estas suposiciones existe la diferencial de la función $dy = f'(x)\,dx$ en el punto x_0 que se denotará por el símbolo $\delta(dy)$ con tal que la última diferencial se determina por la fórmula

$$\delta(dy) = \delta[f'(x)\,dx]|_{x=x_0} = [f'(x)\,dx]'|_{x=x_0} = \delta x = f''(x_0)\,dx\,\delta x. \quad (5.54)$$

Definición. *El valor $\delta(dy)$ de la diferencial de la primera diferencial dy tomando para $\delta x = dx$ se denomina* ***segunda diferencial*** *de la función $y = f(x)$ (en el punto x_0) y se denota por el símbolo $d^2 y$.*

*) Véase el p. 1 del § 9, la fórmula (5.39).

De la fórmula (5.54) y de la definición de la segunda diferencial se desprende que

$$d^2y = f''(x_0)(dx)^2. \qquad (5.55)$$

Observemos que como consideramos fijada la magnitud dx, de la definición de la segunda diferencial se desprende directamente que la segunda diferencial de la variable independiente d^2x es igual a cero.

De manera completamente análoga, se definen sucesivamente las diferenciales de órdenes superiores. Suponiendo que la derivada de orden $(n-1)$ de la función $y = f(x)$ es diferenciable en el punto x_0 (es decir, suponiendo que la función $y = f(x)$ tiene derivada de orden n en el punto x_0) definemos la *diferencial de n-ésimo orden* $d^n y$ de la función $y = f(x)$ (en el punto x_0) como la diferencial $\delta(d^{n-1}y)$ de la diferencial de $(n-1)$-ésimo orden $d^{n-1}y$ tomada para $\delta x = dx$.

Para la diferencial de n-ésimo orden $d^n y$, por el método de inducción se establece fácilmente la fórmula

$$d^n y = f^{(n)}(x_0)(dx)^n. \qquad (5.56)$$

En efecto, para $n = 1$ y $n = 2$, la fórmula (5.56) es válida. Supongamos que es también válida para un número $(n-1)$, o sea, supongamos que $d^{n-1}y = f^{n-1}(x)(dx)^{n-1}$.

Entonces, según la definición de d^n, obtenemos*)

$$d^n y = \delta(d^{n-1}y)|_{\delta x = dx} = \delta[f^{(n-1)}(x)(dx)^{n-1}]|_{\delta x = dx} =$$
$$= f^{(n)}(x)(dx)^{n-1}\delta x|_{\delta x = dx} = f^{(n)}(x)(dx)^n,$$

es decir, la validez de la fórmula (5.56) queda establecida.

De la fórmula (5.58) se desprende la siguiente expresión para la derivada de orden n:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{(dx)^n}. \qquad (5.56')$$

Es muy importante notar que, para $n > 1$, las fórmulas (5.56) y (5.56′) son válidas, hablando en general, si, y sólo si, x es *variable independiente* (es decir, la segunda y las siguientes diferenciales no poseen la propiedad de invariación de la forma).

Para cerciorarse de esto, consideremos el cálculo de la segunda diferencial de una función (dos veces diferenciable) $y = f(x)$, suponiendo que la variable x es función dos veces diferenciable de un argumento t. Empleando la igualdad (5.39) y la fórmula $\delta(uv) =$

*) Omitimos el índice 0 del punto x.

$= v\delta u + u\delta v$, obtenemos:

$$d^2y = \delta(dy)|_{\delta x=dx} = \delta[f'(x)\,dx]|_{\delta x=dx} =$$
$$= \{dx\,\delta[f'(x)] + f'(x)\,\delta(dx)\}|_{\delta x=dx} = [dx\cdot f''(x)\,\delta x]|_{\delta x=dx} + f'(x)\,d^2x.$$

Así pues, $d^2y = f''(x)\,(dx)^2 + f'(x)\,d^2x$.

La última fórmula se diferencia de (5.55) en el término adicional $f'(x)\,d^2x$ que, hablando en general, no es igual a cero.

§ 11. Diferenciación de una función dada en forma paramétrica

En este párrafo examinemos los métodos para calcular las derivadas de las funciones dadas en forma paramétrica.

Sean x e y dadas como funciones de un parámetro t: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Además, supunemos que las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ tienen número necesario de derivadas respecto a la variable t en el campo considerado de variación de esta variable. Suponemos también que en el entorno del punto considerado la función $x = \varphi(t)$ tiene la función inversa $t = \varphi^{-1}(x)$*). La última suposición da la posibilidad de considerar y como la función del argumento x.

Planteemos el problema de calcular las derivadas de y respecto al argumento x. Nos ponemos de acuerdo denotar estas derivadas por los símbolos

$$x'_x,\ y^{(2)}_{x^2},\ y^{(3)}_{x^3},\ \ldots$$

En virtud de la propiedad de invariación de la primera diferencial podemos escribir**)

$$y'_x = \frac{dy}{dx},\quad dy = \psi'(t)\,dt,\quad dx = \varphi'(t)\,dt. \tag{5.57}$$

De estas fórmulas obtenemos la siguiente expresión para la primera derivada:

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{5.58}$$

De manera análoga se calculan las derivadas de órdenes superiores. Así, para calcular la segunda derivada $y^{(2)}x^2$ es suficiente representarla en la forma

$$y^{(2)}_{x^2} = \frac{d(y'_x)}{dx}$$

---

*) Eso se garantiza por la existencia de la primera derivada $\varphi'(t)$ diferente de cero en un entorno del punto considerado t (véase el p. 4 del § 2 del cap. 6, tomo 2).

**) En este caso tomamos dy y dx en un mismo punto t para un mismo dt.

y emplear la fórmula (5.58), la tercera fórmula de (5.57) y la regla de diferenciación del cociente.

EJEMPLO. Calcúlese la primera y la segunda derivadas de la función dada paramétricamente:

$$\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t), \\ y = a(1 - \cos t), \quad -\infty < t < \infty. \end{cases}$$

La curva determinada por estas ecuaciones se denomina *cicloide**).

Obtenemos

$$y'_x = \frac{a \operatorname{sen} t}{a(1-\cos t)} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \ (t \neq 2\pi k, \text{ donde } k \text{ es entero}),$$

$$y^{(2)}_{x^2} = \frac{[\operatorname{ctg} t/2]'}{a(1-\cos t)} = \frac{-1}{4a \operatorname{sen}^4 t/2}.$$

*) La cicloide es la trayectoria de un punto fijo de la circunferencia que rueda sin deslizar por la línea recta.

Capítulo 6

INTEGRAL INDEFINIDA

En este capítulo consideremos el problema de cómo se reconstruye la función por su derivada conocida. La importancia de este problema fue analizada en el cap. 1.

§ 1. Concepto de función primitiva e integral indefinida

1. Concepto de función primitiva. Entre importantes problemas de la mecánica figuran dos problemas, en el primero de los cuales se determina la ley del movimiento del punto material por su velocidad dada, y en el segundo, la ley del movimiento y la velocidad del punto material por su aceleración dada*).

Estos problemas llevan al problema matemático de *hallar la función por su derivada dada.*

Pasemos a la consideración de este problema.

Definición. *Una función $F(x)$ se denomina **función primitiva** (o simplemente **primitiva**) de una función $f(x)$ sobre un intervalo (a, b) si en cualquier punto x del intervalo (a, b), la función $F(x)$ es diferenciable y tiene la derivada $F'(x)$ igual a $f(x)$.*

OBSERVACION. Se define análogamente la primitiva de la función $f(x)$ *sobre la recta infinita y una semirrecta abierta***).

EJEMPLOS. 1) La función $F(x) = \sqrt{1 - x^2}$ es primitiva de la función $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ sobre el intervalo $(-1, +1)$, puesto que en cualquier punto x de este intervalo $(\sqrt{1 - x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

2) La función $F(x) = \operatorname{sen} x$ es primitiva de la función $f(x) = \cos x$ sobre la recta infinita $(-\infty, +\infty)$, puesto que en todo punto x de la recta infinita $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

3) La función $F(x) = \ln x$ es primitiva de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ sobre la semirrecta abierta $x > 0$, puesto que en todo punto x de esta semirrecta $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

---

*) En vez de la aceleración del punto material puede prefijarse la fuerza que actúa sobre este punto (puesto que, según la segunda ley de Newton, la fuerza determina la aceleración de este punto).

**) En general, sobre cualquier conjunto $\{x\}$ *denso en sí*. Véase la definición del conjunto denso en sí en el § 3 del cap. 2.

Si $F(x)$ es primitiva de la función $f(x)$ sobre el intervalo (a, b), entonces, obviamente, la función $F(x)+C$, donde C es una constante cualquiera, es también primitiva de la función $f(x)$ sobre el intervalo (a, b).

Lógicamente, surge la pregunta, cómo están relacionadas entre sí varias primitivas de una misma función $f(x)$. Es válido el siguiente teorema *fundamental*.

***Teorema* 6.1.** *Si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son cualesquiera primitivas de la función $f(x)$ sobre el intervalo (a, b), entonces, en todo este intervalo $F_1(x) - F_2(x) = C$, donde C es una constante.*

En otras palabras, cualesquiera dos primitivas de una misma función pueden diferenciarse solamente en una constante.

DEMOSTRACIÓN. Hagamos $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Ya que cada una de las funciones $F_1(x)$ y $F_2(x)$ es diferenciable sobre el intervalo (a, b), entonces, en virtud del teorema 5.3, la función $\Phi(x)$ es también diferenciable sobre el intervalo (a, b) con tal que en todo este intervalo $\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

En el § 10 del cap. 8, demostremos, sin emplear los resultados del presente capítulo*) el siguiente teorema 8.13: si la función $\Phi(x)$ es diferenciable en todo el intervalo (a, b) y si en todo el intervalo $\Phi'(x) = 0$, entonces la función $\Phi(x)$ es constante sobre el intervalo (a, b).

Valiéndose de este teorema obtenemos que $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x) = C = \text{const}$ lo que se requería demostrar.

Corolario. *Si (x) es una de las funciones primitivas de la función $f(x)$ sobre el intervalo (a, b), entonces **cualquier** primitiva $\Phi(x)$ de la función $f(x)$ sobre el intervalo (a, b) tiene la forma $\Phi(x) = F(x) + C$, donde C es una constante.*

2. **Integral indefinida.**

Definición. *El conjunto de todas las primitivas de la función dada $f(x)$ sobre el intervalo (a, b) se denomina **integral indefinida** de la función $f(x)$ (en este intervalo) y se denota por el símbolo*

$$\int f(x)\,dx. \tag{6.1}$$

El signo $\int$ se denomina *signo de integral*, la expresión $f(x)\,dx$ se llama *expresión subintegral* (*integrando*) y la propia función $f(x)$, *función subintegral* (*integrando*).

Si $F(x)$ es una de las funciones primitivas de la función $f(x)$ en el intervalo (a, b), entonces, en virtud del corolario del teorema 6.1,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{6.2}$$

donde C es una constante cualquiera.

*) Observemos que, sin perjudicar la comprensión de este libro, se puede leer los capítulos 6 y 7 después del cap. 8. Adelantamos los capítulos 6 y 7 para que el lector conozca más rápido posible la técnica de integración.

Subrayemos que *si la primitiva (y, por tanto, la integral indefinida) de la función $f(x)$ sobre el intervalo (a, b) existe, entonces la expresión subintegral de la fórmula* (6.1) *es la diferencial de cualquiera de estas primitivas.* En efecto, sea $F(x)$ cualquiera de las primitivas de la función $f(x)$ sobre el intervalo (a, b), es decir, para todos los x del intervalo (a, b) $F'(x) = f(x)$. Entonces $f(x)\,dx = F'(x)\,dx = dF$.

EJEMPLOS. 1) $\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sqrt{1-x^2} + C$ en el intervalo $-1 < x < 1$, puesto que la función $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ es una de las primitivas de la función $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ sobre dicho intervalo.

2) $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$ sobre toda la recta $-\infty < x < \infty$, puesto que la función $F(x) = \operatorname{sen} x$ es una de las primitivas de la función $f(x) = \cos x$ sobre toda la recta infinita.

En este capítulo no vamos a examinar el problema de la *existencia* de primitivas (o integrales indefinidas) para amplias clases de funciones. Sólo notemos aquí que en el § 7 del cap. 1 del tomo 2 demostraremos que *para cualquier función $f(x)$ continua sobre el intervalo (a, b) existe función primitiva (así como la integral indefinida) en este intervalo.*

La operación de hallar la primitiva o la integral indefinida (de la función $f(x)$) suele llamarse *integración* (de la función $f(x)$).

3. Propiedades fundamentales de la integral indefinida. Ante todo señalemos dos propiedades que se desprenden directamente de la definición de la integral indefinida:

1°. $d \int f(x)\,dx = f(x)\,dx$.

2°. $\int dF(x) = F(x) + C$.

La propiedad 1° significa que los símbolos d y $\int$ se reducen mutuamente si el símbolo de la diferencial está delante del símbolo de la integral.

La propiedad 2° significa que los símbolos $\int$ y d se reducen mutuamente si el símbolo de la integral está delante del símbolo de la diferencial, pero, en este caso, hay que adicionar a $F(x)$ una constante arbitraria C.

Para establecer la propiedad 1° baste tomar la diferencial de ambos miembros de la fórmula (6.2) y tener en cuenta que $dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$.

Para establecer la propiedad 2° es suficiente emplear la igualdad $dF(x) = f(x)\,dx$ en el miembro izquierdo de (6.2).

Las dos propiedades siguientes suelen denominarse *propiedades lineales* de la integral:

3°. $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$.

4°. $\int [Af(x)]\, dx = A \int f(x)\, dx \quad (A = \text{const})$.

Subrayemos que en las fórmulas 3° y 4° la igualdad tiene carácter convencional: ésta debe comprenderse como la igualdad de los miembros derecho e izquierdo con exactitud de hasta un sumando constante arbitrario (lo que se comprende, ya que cada una de las integrales de las fórmulas 3° y 4° se determina con exactitud de hasta un sumando constante arbitrario).

Ya que dos primitivas de una misma función pueden diferenciarse solamente en una constante, entonces, para demostrar la propiedad 3°, basta demostrar que si $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ y $G(x)$, primitiva de $g(x)$, entonces, la función $[F(x) \pm G(x)]$ es primitiva de la función $f(x) \pm g(x)$. Lo último se desprende directamente de que la derivada de la suma (algebraica) de funciones es igual a la suma de las derivadas de estas funciones, es decir, $[F(x) - G(x)]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$. Análogamente se demuestra la propiedad 4°. En este caso se emplea la igualdad $[AF(x)'] = AF'(x) = Af(x)$.

4. Tabla de las integrales indefinidas fundamentales. En el cap. 5 hemos obtenido la tabla de las derivadas de las funciones elementales más simples (véase el § 8 del cap. 5) que es el aparato de cálculo para el cálculo diferencial. Toda fórmula de esta tabla, en la cual una u otra función $F(x)$ tiene derivada igual a $f(x)$, nos lleva en virtud de la definición de la integral indefinida, a la fórmula correspondiente del cálculo integral

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

De este modo, confeccionamos la siguiente tabla de las integrales indefinidas fundamentales:

1°. $\int 0 \cdot dx = C$.

2°. $\int 1 \cdot dx = x + C$.

3°. $x^{\alpha}\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$.

4°. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \quad (x \neq 0)$.

5°. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$, $\int e^x\, dx = e^x + C$.

6°. $\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$.

7°. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$.

8°. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx = \operatorname{tg} x + C$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\right.$ donde $\left. n = 0, \pm 1, \ldots\right)$.

9°. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \int (1+\operatorname{ctg}^2 x)\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$ ($x \neq \pi n$, donde $n = 0, \pm 1, \ldots$).

10°. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arcsen} x + C, \\ -\arccos x + C \end{cases}$ $(-1 < x < 1)$.

11°. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C. \end{cases}$

12°. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$ (si el signo es $-$, $|x| > 1$).

13°. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$ $(|x| \neq 1)$.

A estas fórmulas pueden también agregarse las fórmulas correspondientes para las funciones hiperbólicas:

14°. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$.

15°. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$.

16°. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

17°. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$ $(x \neq 0)$.

Hagamos observaciones respecto a las fórmulas 4, 12 y 13. La fórmula 4 es válida para cualquier intervalo que no comprende $x = 0$. En efecto, si $x > 0$, entonces, de la fórmula $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ deducimos que $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$, y si $x < 0$, entonces, de la fórmula $[\ln(-x)]' = \frac{1}{x}$ deducimos que $\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C$. Por lo tanto, la fórmula 4 se verifica para cualquier $x \neq 0$.

Las fórmulas 12 y 13 ocupan posición exclusiva en nuestra tabla puesto que no tienen fórmulas análogas entre las fórmulas de la tabla de las derivadas.

Sin embargo, para comprobar las fórmulas 12 y 13 basta cerciorarse de que las derivadas de las expresiones de los miembros derechos de estas fórmulas coinciden con las funciones subintegrales correspondientes.

Nuestro objetivo es completar la tabla de las integrales indefinidas con los procedimientos y métodos de integración. Pero antes de realizarlo, hagamos una observación importante.

En el § 7 del cap. 4 hemos introducido el concepto de la *función elemental* y en el p. 3 del § 8 en el cap. 5 hemos establecido que la derivada de cualquier función elemental es también función elemental. En otras palabras, hemos establecido que *la operación de diferenciación no nos deja salir de la clase de funciones elementales.*

Notemos en seguida que con la operación de integración no pasa lo mismo. Se puede demostrar que las integrales de algunas funciones elementales ya no son funciones elementales. Pueden servir de ejemplo las siguientes integrales:

1°. $\int e^{-x^2}\,dx$.

2°. $\int \cos(x^2)\,dx$.

3°. $\int \operatorname{sen}(x^2)\,dx$.

4°. $\int \frac{dx}{\ln x}$ $(0 < x \neq 1)$.

5°. $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$ $(x \neq 0)$.

6°. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$.

Cada una de las integrales mencionadas *no es función elemental*. Dichas funciones no sólo existen en realidad*), sino desempeñan gran papel en varios problemas de la física. Así, por ejemplo, la integral 1, llamada *integral de Poisson* o *integral de errores*, se usa ampliamente en la física estadística, en la teoría de la conductibilidad calorífica y la difusión, las integrales 2 y 3, llamadas *integrales de Frenel*, se emplean ampliamente en la óptica. En las aplicaciones se encuentran también con frecuencia las integrales 4—6, la primera de las cuales se denomina *logaritmo integral* y las dos últimas, *coseno y seno integrales*.

Para todas nuevas funciones enumeradas (integral de Poisson, integrales de Frenel, logaritmo integral, coseno y seno integrales) están hechas las tablas y gráficos.

Ya que estas funciones tienen importancia en las aplicaciones, fueron examinadas tan completamente como las funciones elementales más simples. En general, cabe subrayar que el concepto de la función elemental más simple es de carácter convencional.

*) Ya hemos notado que en el § 7 del cap. 1 del tomo 2 demostraremos la existencia de la integral indefinida para cualquier función continua. La existencia de las integrales 1—6 se garantiza por la continuidad de las funciones subintegrales.

§ 2. Métodos fundamentales de integración

1. Integración por cambio de variable (por sustitución). El cambio de variable es uno de los procedimientos más eficaces de integración. Se basa en la siguiente afirmación elemental.

Sea que la función $t = \varphi(x)$ está definida y es diferenciable sobre cierto conjunto $\{x\}$) y sea $\{t\}$ conjunto de los valores de esta función. Luego, sea que para la función $g(t)$ existe la función primitiva $G(t)$ sobre el conjunto $\{t\}$, es decir,*

$$\int g(t)\,dt = G(t) + C. \tag{6.3}$$

Entonces, sobre todo el conjunto $\{x\}$, para la función $g[\varphi(x)]\,\varphi'(x)$ existe la función primitiva igual a $G[\varphi(x)]$ es decir,

$$\int g[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = G[\varphi(x)] + C. \tag{6.4}$$

Para demostrar esta afirmación es suficiente emplear la regla de diferenciación de la función compuesta**)

$$\frac{d}{dx}\{G[\varphi(x)]\} = G'[\varphi(x)]\,\varphi'(x)$$

y tener en cuenta que, según la definición de la primitiva, $G'(t) = g(t)$. Ahora, supongamos que se necesita calcular la integral

$$\int f(x)\,dx. \tag{6.5}$$

En algunos casos se logra escoger, como nueva variable, una función diferenciable $t = \varphi(x)$ tal que tiene lugar la igualdad

$$f(x) = g[\varphi(x)]\,\varphi'(x) \tag{6.6}$$

con tal que es fácil integrar la función $g(t)$, es decir, calcular la integral

$$\int g(t)\,dt = G(t) + C.$$

La afirmación demostrada anteriormente permite escribir la siguiente fórmula para le integral (6.5):

$$\int f(x)\,dx = G[\varphi(x)] + C. \tag{6.7}$$

Este procedimiento de calcular la integral (6.5) se denomina *integración por cambio de variable.*

Naturalmente, este procedimiento no se aplica a toda integral. Además, cabe subrayar que la elección correcta de la sustitución

---

*) Este conjunto es intervalo o segmento, o bien semirrecta o recta infinita.
**) Véase el § 7 del cap. 5.

depende, en modo considerable, de la habilidad del que calcula. Aducimos algunos ejemplos que ilustran el método expuesto.

1°. Calcúlese $\int \cos 2x\,dx$. Para calcular esta integral, debemos hacer la sustitución más simple $t = 2x$, $dt = 2dx$. Como resultado de este cambio, obtenemos

$$\int \cos 2x\,dx = \int \frac{1}{2}\cos t\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C.$$

2°. Calcúlese $\int \frac{dx}{x+a}$. Esta integral se calcula empleando la sustitución $t = x + a$, $dt = dx$.

En este caso obtenemos

$$\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x+a| + C \quad (x \neq -a).$$

3°. Calcúlese $\int e^{\cos x}\operatorname{sen} x\,dx$. Es fácil ver que esta integral se calcula haciendo la sustitución $t = \cos x$.

En efecto, en este caso $dt = -\operatorname{sen} x\,dx$ y

$$\int e^{\cos x}\operatorname{sen} x\,dx = -\int e^{t}\,dt = -e^{t} + C = -e^{\cos x} + C.$$

4°. Calcúlese $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^{100}}{1+x^2}\,dx$. Para calcular esta integral es conveniente hacer la sustitución $t = \operatorname{arctg} x$. En efecto, con esta sustitución $dt = \frac{dx}{1+x^2}$ y $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^{100}}{1+x^2}\,dx = \int t^{100}\,dt = \frac{t^{101}}{101} + C =$ $= \frac{(\operatorname{arctg} x)^{101}}{101} + C$.

5°. Calcúlese $\int (7x-9)^{2999}\,dx$. Naturalmente, se puede reducir esta integral a la suma de tres mil integrales de tabla escribiendo la función subintegral según la fórmula del binomio de Newton. Es incomparablemente más simple hacer la sustitución $t = 7x - 9$, $dt = 7dx$. Como resultado, obtenemos

$$\int (7x-9)^{2999}\,dx = \frac{1}{7}\int t^{2999}\,dt = \frac{t^{3000}}{21\,000} + C = \frac{(7x-9)^{3000}}{21\,000} + C.$$

6°. Calcúlese $\int \frac{dx}{\cos x}$. Para hallar la sustitución que permite calcular esta integral, la escribimos en la forma

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\,dx}{1-\operatorname{sen}^2 x}.$$

Está claro que luego debemos poner $t=\operatorname{sen} x$, $dt=\cos x\,dx$. Como resultado, obtenemos

$$\int \frac{dx}{\cos x}=\int \frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

7°. Calcúlese $\int \frac{x^3\,dx}{(2x)^8+1}$. Es conveniente hacer la sustitución $t=(2x)^4$, $dt=64x^3\,dx$. En este caso

$$\int \frac{x^3\,dx}{(2x)^8+1}=\frac{1}{64}\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{\operatorname{arctg} t}{64}+C=\frac{\operatorname{arctg}(2x)^4}{64}+C.$$

8°. Calcúlese $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$. Para calcular esta integral, es conveniente hacer la sustitución trigonométrica $t=\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$, $x=a\operatorname{tg} t$, $dx=a\frac{dt}{\cos^2 t}$.

Después de realizarla, la integral toma la forma

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}=\frac{1}{a^2}\int \cos t\,dt=\frac{\operatorname{sen} t}{a^2}+C=$$
$$=\frac{\operatorname{tg} t}{a^2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}+C=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C.$$

9°. Calcúlese $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$. Aquí es conveniente hacer la sustitución $t=\operatorname{arcsen} x/a$, $x=a\operatorname{sen} t$, $dx=a\cos t\,dt$. En este caso

$$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}=\frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{\operatorname{tg} t}{a^2}+C=$$
$$=\frac{1}{a^2}\frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}+C=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C.$$

10°. Calcúlese $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$. Para calcular esta integral es conveniente hacer la sustitución $2t=\arccos\frac{x}{a}$, $x=a\cos 2t$, $dx=-2a\operatorname{sen} 2t\,dt$. Obtenemos

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx=-4a\int \cos^2 t\,dt=$$
$$=-4a\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=-2at-2a\int \cos 2t\,dt=$$
$$=-2at-a\operatorname{sen} 2t+C=-a\left[\arccos\frac{x}{a}+\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right]+C.$$

2. Integración por partes. Entre los métodos muy eficaces de integración figure el *método de integración por partes*. Se basa en la siguiente afirmación.

Sea que cada una de las funciones $u(x)$ y $v(x)$ es diferenciable sobre un conjunto $\{x\}$ y, además, existe la primitiva de la función $v(x)\,u'(x)$ sobre este conjunto. Entonces, sobre el conjunto $\{x\}$ existe también la primitiva de la función $u(x)v'(x)$ con tal que es válida la fórmula

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx. \tag{6.8}$$

OBSERVACIÓN. La definición de la diferencial y la propiedad de invariación de su forma permiten escribir la fórmula (6.8) en la forma

$$\int u\,dv = u(x)\,v(x) - \int v\,du. \tag{6.9}$$

Para demostrar la afirmación enunciada, escribamos la fórmula para la derivada del producto de dos funciones $u(x)$ y $v(x)$

$$[u(x)\,v(x)]' = u(x)\,v'(x) + u'(x)\,v(x). \tag{6.10}$$

Multipliquemos la igualdad (6.10) por dx y tomemos la integral de ambos miembros de la igualdad obtenida. Ya que, según la condición, para todos los x del conjunto $\{x\}$ existe $\int v(x)\,u'(x)\,dx$ y $\int [u(x)\,v(x)]'\,dx = u(x)\,v(x) + C$ (véase la propiedad 2° del p. 3 del § 1), entonces, para todos los x del conjunto $\{x\}$ existe también la integral $\int u(x)\,v'(x)\,dx$ con tal que es válida la fórmula (6.8) (ó (6.9)).

La fórmula (6.9) *permite sustituir el problema de calcular la integral* $\int u\,dv$ por el de calcular la integral $\int v\,du$. En algunos casos concretos esta integral se calcula sin dificultad.

El cálculo de la integral $\int u\,dv$ aplicando la fórmula (6.9) se denomina *integración por partes*. Observemos que para aplicación concreta de la fórmula de integración por partes (6.9) es muy cómodo usar la tabla de las diferenciales escrita en el p. 2 del § 9 del cap. 5.

Pasamos a considerar ejemplos.

1°. Calculemos la integral $I = \int x^n \ln x\,dx$ $(n \neq -1)$. Poniendo $u = \ln x$, $dv = x^n\,dx$ y empleando la fórmula (6.9) obtenemos $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$,

$$I = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{(n+1)}\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C.$$

2°. Luego calculemos la integral $I = \int x \operatorname{arctg} x\,dx$. Poniendo $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = x\,dx$ y empleando la fórmula (6.9), tendremos

$du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = \frac{x^2}{2}$,

$$I = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{[(1+x^2)-1]}{1+x^2} dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.$$

3°. Calculemos la integral $I = \int x^2 \cos x \, dx$. Primero apliquemos la fórmula (6.9) poniendo $u = x^2$, $dv = \cos x \, dx$. Obtenemos $du = 2x \, dx$, $v = \operatorname{sen} x$, $I = x^2 \operatorname{sen} x - 2\int x \operatorname{sen} x \, dx$. Para calcular la última integral volvamos a aplicar la fórmula (6.9) poniendo esta vez $u = x$, $dv = \operatorname{sen} x \, dx$. Obtenemos $du = dx$, $v = -\cos x$, $I = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \int \cos x \, dx = (x^2 - 2) \operatorname{sen} x + 2x \cos x + C$. De este modo, hemos calculado la integral $\int x^2 \cos x \, dx$ haciendo doble integración por partes. Es fácil comprender que la integral $\int x^n \cos x \, dx$ (donde n es cualquier número positivo entero) puede calcularse según el método análogo, integrando n veces por partes.

4°. Calculemos ahora la integral $I = \int e^{ax} \cos bx \, dx$ ($a = \text{const}$, $b = \text{const}$). Primeramente, apliquemos la fórmula (6.9), poniendo $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx \, dx$. Obtenemos $du = ae^{ax} \, dx$, $v = \frac{\operatorname{sen} bx}{b}$,

$$I = \frac{e^{ax} \operatorname{sen} bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx.$$

Para calcular la última integral, volvamos a aplicar la fórmula (6.9) poniendo esta vez $u = e^{ax}$, $dv = \operatorname{sen} bx \, dx$. Obtenemos $du = ae^{ax} \, dx$, $v = -\frac{\cos bx}{b}$,

$$I = \frac{e^{ax} \operatorname{sen} bx}{b} + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} I. \qquad (6.11)$$

De este modo, integrando I dos veces por partes hemos obtenido, para la integral I, la ecuación de primer orden (6.11). De esta ecuación hallamos

$$I = \frac{a \cos bx + b \operatorname{sen} bx}{a^2 + b^2} e^{ax}.$$

La práctica muestra que la mayoría de las integrales que se calculan mediante la integración por partes puede dividirse en *tres grupos* siguientes:

1) El *primer* grupo incluye las integrales cuya función subintegral comprende, como factor, una de las funciones siguientes: $\ln x$,

arcsen x, arccos x, arctg x, $(\text{arctg } x)^2$, $(\arccos x)^2$, $\ln \varphi(x)$, ... (véase los ejemplos 1° y 2° anteriormente considerados). Para calcular las integrales del primer grupo, hace falta emplear la fórmula (6.9) poniendo, en ella, $u(x)$ igual a una de las funciones anteriormente mencionadas*).

2) El *segundo* grupo incluye las integrales de tipo

$$\int (ax+b)^n \cos(cx)\,dx, \quad \int (ax+b)^n \operatorname{sen}(cx)\,dx, \quad \int (ax+b)^n e^{cx}\,dx,$$

donde a, b, c son ciertas constantes, n es cualquier número positivo entero (véase anteriormente el ejemplo 3°). Las integrales del *segundo* grupo se toman aplicando n veces la fórmula de integración por partes (6.9) con tal que en calidad de $u(x)$ hay que tomar cada vez $(ax+b)$ en potencia correspondiente. Después de toda integración por partes esta potencia disminuye en la unidad.

3) El *tercer* grupo incluye las integrales de tipo $\int e^{ax} \cos bx\,dx$, $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx$, $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$, $\int \cos(\ln x)\,dx$, ... (véase el ejemplo 4° anteriormente considerado). Al denotar cualquiera de las integrales de este grupo por I realizando dos veces la integración por partes, componemos la ecuación del primer orden para I.

Naturalmente, los tres grupos mencionados no incluyen todas las integrales, sin excepción, que se toman mediante la integración por partes. Aduzcamos los ejemplos de integrales que no entran en ninguno de los tres grupos enumerados, pero se calculan empleando la fórmula (6.9).

5°. Calculemos la integral $I = \int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$. Esta integral no figura en ninguno de los tres grupos mencionados. Sin embargo, empleando la fórmula (6.9) y poniendo en ella $u = x$, $dv = \frac{dx}{\cos^2 x}$, obtenemos $du = dx$, $v = \operatorname{tg} x$.

$$I = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,dx = x \operatorname{tg} x - \int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos x} =$$

$$= x \operatorname{tg} x + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C.$$

6°. En fin, calculemos una integral muy importante para la exposición sucesiva $K_\lambda = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^\lambda}$, donde $a = \text{const}$, $\lambda = 1, 2, \ldots$. Esta integral tampoco figura en ninguno de los tres grupos anterior-

*) Si la función subintegral comprende, en calidad del factor, $(\text{arctg } x)^2$ $(\arccos x)^2$, ..., hay que aplicar dos veces la fórmula de integración por partes (6.9).

mente mencionados. Para calcular esta integral, establecemos para ella la fórmula recurrente que sustituye el problema de calcular K_λ por el de calcular $K_{\lambda-1}$.

Se puede escribir (cuando $\lambda \neq 1$)

$$K_\lambda = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2\,dt}{(t^2+a^2)^\lambda} = \frac{1}{a^2} \int \frac{[(t^2+a^2)-t^2]\,dt}{(t^2+a^2)^\lambda} =$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{\lambda-1}} - \frac{1}{2a^2} \int t \frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)} =$$

$$= \frac{1}{a^2} K_{\lambda-1} - \frac{1}{2a^2} \int t \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^\lambda}.$$

Para calcular la última integral, apliquemos la fórmula de integración por partes (6.9) poniendo en ella $u = t$, $dv = \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^\lambda}$.

Obtenemos $du = dt$, $v = \frac{-1}{(\lambda-1)(t^2+a^2)^{\lambda-1}}$.

$$K_\lambda = \frac{1}{a^2} K_{\lambda-1} + \frac{t}{2a^2(\lambda-1)(t^2+a^2)^{\lambda-1}} - \frac{1}{2a^2(\lambda-1)} K_{\lambda-1}.$$

De la última igualdad obtenemos la fórmula recurrente

$$K_\lambda = \frac{t}{2a^2(\lambda-1)(t^2+a^2)^{\lambda-1}} + \frac{1}{a^2}\frac{(2\lambda-3)}{(2\lambda-2)} K_{\lambda-1}. \qquad (6.12)$$

Cerciorémonos de que la fórmula recurrente (6.12) permite calcular la integral K_λ para cualquier $\lambda = 2, 3, \ldots$. En efecto, la integral K_1 se calcula de modo elemental

$$K_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(t/a)}{(t/a)^2+1} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C.$$

Después de haber calculado la integral K_1, poniendo en la fórmula (6.12) $\lambda = 2$, calculamos K_2 sin dificultad alguna. A su lugar, conociendo K_2 y poniendo, en la fórmula (6.12), $\lambda = 3$, calculamos sin dificultad K_3. Si seguimos haciendo de este modo, calculamos la integral K_λ para cualquier λ natural.

Capítulo 7

NÚMEROS COMPLEJOS. ÁLGEBRA DE POLINOMIOS. INTEGRACIÓN EN FUNCIONES ELEMENTALES

En el capítulo anterior hemos notado que, hablando en general, la integral indefinida de la función elemental no es función elemental. No obstante, existen clases bastante amplias de funciones cuyas integrales son funciones elementales. (Estas clases de funciones se denominan *integrables en funciones elementales.*) El presente capítulo tiene por objeto examinar dichas clases de funciones. Puesto que entre clases de funciones mencionadas una de las fundamentales es la *clase de las funciones racionales*, ante todo debemos precisar nuestros conocimientos sobre los polinomios y las funciones racionales. Para eso, a su vez, es necesario precisar nociones de los números complejos.

§ 1. Nociones de los números complejos

Dos números reales x e y se denominan par ordenado si se indica cuál de estos números es primero y cuál, segundo. El par ordenado de los números reales x e y se denota por el símbolo (x, y). En primer lugar se escribe el primer elemento del par x.

Se denomina número complejo el par ordenado (x, y) de números reales, el primero de los cuales x se llama parte real del número complejo, y el segundo y, parte imaginaria.

Si la parte imaginaria y es igual a cero, nos ponemos de acuerdo identificar el par correspondiente $(x, 0)$ con el número real x. Esto permite considerar el conjunto de todos los números reales como parte del conjunto de los números complejos.

Dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ se llaman iguales si $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Se dice que el *número complejo $z = (x, y)$ es igual a cero si $x = 0$ e $y = 0$.*

Definemos las operaciones de adición y multiplicación de los números complejos. Ya que los números reales son parte del conjunto de los números complejos, estas operaciones deben ser definidas de tal modo que, siendo aplicadas a dos números reales, lleven a definiciones de la suma y el producto de números reales ya conocidas del § 2 del cap. 2.

Se denomina suma de dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ el número complejo z de tipo

$$z = (x_1 + x_2, y_1 + y_2). \tag{7.1}$$

Se denomina producto de dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ *y* $z_2 = (x_2, y_2)$ *el número complejo z de tipo*

$$z = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \qquad (7.2)$$

Es fácil verificar que la suma y el producto de números complejos poseen las mismas propiedades que la suma y el producto de números reales. A saber, son válidas las siguientes propiedades:

1°. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (la propiedad conmutativa de la suma).

2°. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (la propiedad asociativa de la suma).

3°. $z + (0, 0) = z$ (el papel especial del número (0, 0)).

4°. Para todo número $z = (x, y)$ existe un número opuesto $z' = (-x, -y)$ tal que $z + z' = (0, 0)$.

5°. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (la propiedad conmutativa del producto).

6°. $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ (la propiedad asociativa del producto).

7°. $z \cdot (1, 0) = z$ (el papel especial del número (1, 0)).

8°. Para cualquier número complejo $z = (x, y)$ no igual a cero existe un número inverso $\frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ tal que $z \cdot \frac{1}{z} = (1, 0)$.

9°. $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$ (la propiedad distributiva del producto respecto a la suma).

Las propiedades 1°—9° permiten comprobar que para los números complejos se mantienen completamente todas las reglas del álgebra elemental que se refieren a las operaciones aritméticas y a la combinación de las igualdades.

Además, estas propiedades resuelven completamente el problema de la *sustracción de números complejos* que se considera como una operación inversa de la adición, y de la *división de números complejos* como una operación inversa de la multiplicación.

Se denomina *diferencia de dos números complejos* $z_1 = (x_1, y_1)$ *y* $z_2 = (x_2, y_2)$ *un número complejo z tal que, sumándose a* z_2, *da* z_1. Empleando las propiedades 1°—4° establecemos fácilmente la existencia y la unicidad de la diferencia de cualesquiera dos números complejos*).

Es fácil verificar que la diferencia de dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ es el número complejo z de tipo

$$z = (x_1 - x_2, y_1 - y_2). \qquad (7.3)$$

Se denomina cociente de dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ *y* $z_2 = (x_2, y_2)$, *el segundo de los cuales no es igual a cero, un número complejo z tal que, siendo multiplicado por* z_2, *da* z_1. Empleando las propiedades 5°—8°, establecemos fácilmente que el único cociente de

*) Esto se hace de modo igual que para los números reales (véase el p. 3 del § 2 del cap. 2).

dos números complejos mencionados es el número complejo z de tipo

$$z=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\ \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right). \tag{7.4}$$

En las operaciones con los números complejos desempeña un papel especial el número representable por el par (0, 1) y denotado mediante la letra i. Multiplicando este par por sí mismo (o sea, elevándolo al cuadrado), obtenemos, en virtud de la definición del producto de números complejos:

$$(0,\ 1)\cdot(0,\ 1)=(-1,\ 0)=-1, \text{ o sea, } i^2=-1.$$

Observando eso, podemos representar cualquier número complejo $z=(x,\ y)$ en la forma

$$z=(x,\ y)=(x,\ 0)+(0,\ y)=(x,\ 0)+(y,\ 0)\cdot(0,\ 1)=x+iy.$$

A continuación, para el número complejo $z=(x,\ y)$ usamos ampliamente la representación $z=x+iy$. Al representar así este número y al considerar i como el factor cuyo cuadrado es igual a -1 podemos realizar las operaciones con los números complejos de modo igual que se realizan con los polinomios algebraicos.

El número complejo $\bar{z}=(x,\ -y)=x-iy$ suele llamarse *conjugado respecto al número complejo* $z=(x,\ y)=x+iy$.

Es obvio que *el número complejo es igual a cero si, y solo si, es igual a cero su número conjugado* puesto que las igualdades $x=0$, $y=0$ son equivalentes a las igualdades $x=0$, $-y=0$.

Para representar geométricamente los números complejos es conveniente usar el sistema cartesiano rectangular de coordenadas. En este caso el número complejo $z=(x,\ y)$ se representa por el punto M de coordenadas $(x,\ y)$ o el vector $\overrightarrow{OM}$ que va del origen de coordenadas al punto M.

Si los números están representados de esta forma, la adición y la sustracción de los números complejos se reduce a la adición y la sustracción de sus vectores correspondientes (lo que se comprende por las fórmulas (7.1) y (7.3)).

Si a la par con el sistema cartesiano de coordenadas introducimos el sistema polar de coordenadas de tal modo que el polo esté en el origen O del sistema cartesiano y el eje polar sea dirigido a lo largo del sentido positivo del eje Ox, entonces, como se sabe, las coordenadas cartesianas $(x,\ y)$ y las polares $(\rho,\ \theta)$ de cualquier punto M se relacionan por las fórmulas

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\left.\begin{aligned} x&=\rho\cos\theta,\\ y&=\rho\operatorname{sen}\theta \end{aligned}\right\}\qquad \theta=\left\{\begin{array}{ll} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{si } x>0,\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\pi\operatorname{sgn} y & \text{si } x<0,\\ \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y & \text{si } x=0. \end{array}\right\} \tag{7.5}$$

Las fórmulas (7.5) llevan a la *forma trigonométrica* de representación del número complejo $z = (x, y)$

$$z = (x, y) = x + iy = (\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta) = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta). \quad (7.6)$$

En la forma trigonométrica de representación (7.6) el número ρ se denomina *módulo* y el ángulo θ, *argumento* del número complejo. El argumento θ no está definido unívocamente: en vez del valor θ se puede tomar el valor $\theta + 2\pi n$ (donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Empleando la forma trigonométrica es cómodo realizar las operaciones de multiplicación y división de los números complejos.

Sean dados dos números complejos arbitrarios

$$z_1 = (x_1, y_1) = (\rho_1 \cos\theta_1, \rho_1 \operatorname{sen}\theta_1) \text{ y}$$

$$z_2 = (x_2, y_2) = (\rho_2 \cos\theta_2, \rho_2 \operatorname{sen}\theta_2).$$

Entonces, según la definición de la multiplicación (en virtud de la fórmula (7.2)), el producto de estos números tiene la forma

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) = \\ &= (\rho_1\rho_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \rho_1\rho_2 \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2, \\ &\quad \rho_1\rho_2 \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + \rho_1\rho_2 \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2) = \\ &= [(\rho_1\rho_2) \cos(\theta_1 + \theta_2), (\rho_1\rho_2) \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]. \quad (7.7) \end{aligned}$$

De la fórmula (4.7) deducimos de manera análoga que el cociente $\frac{z_1}{z_2}$ de dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1) = (\rho_1 \cos\theta_1, \rho_1 \operatorname{sen}\theta_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2) = (\rho_2 \cos\theta_2, \rho_2 \operatorname{sen}\theta_2)$ tiene la forma*)

$$\frac{z_1}{z_2} = \left[\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \cos(\theta_1 - \theta_2), \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\right]. \quad (7.8)$$

De las fórmulas (7.7) y (7.8) deducimos que, *al multiplicar dos números complejos, sus módulos se multiplican y sus argumentos se suman* (*al dividir dos números complejos, sus módulos se dividen y sus argumentos se restan*). Esta propiedad se transfiere sucesivamente al caso del producto de cualquier número finito de números complejos. En particular, si se multiplican n números complejos iguales (es decir, si el número complejo se eleva a la potencia n), entonces

$$(\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta)^n = (\rho^n \cos\theta n, \rho^n \operatorname{sen}\theta n). \quad (7.9)$$

De la fórmula (7.9), cuando $\rho = 1$, obtenemos la llamada *fórmula de Moivre***)

$$(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)^n = (\cos\theta n, \operatorname{sen}\theta n). \quad (7.10)$$

---

*) Al mismo tiempo se supone que el número complejo z_2 no es igual a cero, es decir, $\rho_2 \neq 0$.

**) A. De Moivre, matemático inglés de origen francés (1667—1754).

La fórmula (7.10) puede también escribirse de otra forma

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos\theta n + i \operatorname{sen}\theta n. \qquad (7.11)$$

Para concluir, observemos que el número complejo escrito en forma trigonométrica es igual a cero si, y sólo si, es igual a cero su módulo. De aquí y de que al multiplicar números complejos sus módulos se multiplican se desprende que *el producto de varios números complejos es igual a cero si, y sólo si, es igual a cero por lo menos uno de los factores.*

§ 2. Polinomios algebraicos

1. Se denomina *polinomio algebraico* de grado n la expresión de tipo

$$f(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_{n-1} z + c_n, \qquad (7.12)$$

donde $z = (x, y) = x + iy$ es número complejo variable y $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son ciertos números complejos constantes, el primero de los cuales es diferente de cero. Como se sabe, cualquier polinomio algebraico de grado n puede dividirse «en columna» por otro polinomio algebraico de grado no superior a n. De este modo llegamos a la siguiente afirmación: *cualesquiera que sean dos polinomios $f(z)$ y $\varphi(z)$ tales que el grado de $\varphi(z)$ no es superior al de $f(z)$, es válida la igualdad*

$$f(z) = \varphi(z) \cdot q(z) + r(z), \qquad (7.13)$$

donde $q(z)$ y $r(z)$ son ciertos polinomios con tal que el grado de $q(z)$ es igual a la diferencia de los grados de los polinomios $f(z)$ y $\varphi(z)$, y el grado de $r(z)$ es inferior al de $\varphi(z)$.

Al respecto de los polinomios $f(z)$, $\varphi(z)$, $q(z)$ y $r(z)$ que figuran en la igualdad (7.13) suelen aplicarse los términos bien comprensibles «dividendo», «divisor», «cociente» y «resto».

Se dice que el polinomio $f(z)$ se divide por el polinomio $\varphi(z)$ si en la fórmula (7.13) obtenida por la división «en columna», el resto $r(z) = 0$.

Nos ponemos de acuerdo llamar polinomio de grado nulo cualquier constante compleja. Entonces, está completamente claro *que cualquier polinomio se divide por un polinomio diferente de cero de grado nulo.* Examinemos el problema de divisibilidad del polinomio $f(z)$ por el polinomio de primer grado $(z - b)$.

Definición. *El número complejo b se denomina **raíz del polinomio** $f(z)$ si $f(b)$ es igual a cero.*

Teorema 7.1. *El polinomio de grado nulo $f(z)$ se divide por el binomio $(z - b)$ si, y sólo si, b es raíz del polinomio $f(z)$.*

DEMOSTRACION Para los polinomios $f(z)$ y $\varphi(z) = (z - b)$ escribamos la fórmula (7.13). Puesto que en esta fórmula el grado del resto $r(z)$ *debe ser inferior* al grado del divisor $\varphi(z) = z - b$, entonces

$r(z)$ es *polinomio de grado nulo*, o sea, $r(z) = c = \text{const}$. De este modo, la fórmula (7.13) toma la forma

$$f(z) = (z - b) \cdot q(z) + c. \tag{7.14}$$

Poniendo, en la fórmula (7.14), $z = b$, hallemos que $c = f(b)$. Por definición, $f(z)$ se divido por $z - b$ si, y sólo si, el resto de la fórmula (7.14) $c = f(b)$ es igual a cero, o sea, si, y sólo si, b es raíz de $f(z)$. El teorema queda demostrado.

2. Lógicamente, surge la pregunta, si tiene raíces todo polinomio algebraico. La respuesta da el *teorema fundamental del álgebra**): *todo polinomio de grado no nulo tiene al menos una raíz.*

Basándonos en este teorema, demostremos que el polinomio algebraico de grado n tiene exactamente n raíces**). En efecto, sea $f(z)$ polinomio de grado n. Según el teorema fundamental del álgebra, $f(z)$ tiene al menos una raíz b_1, o sea, para $f(z)$ es válida la fórmula

$$f(z) = (z - b_1) f_1(z), \tag{7.15^1}$$

donde mediante $f_1(z)$ se denota cierto polinomio de grado $(n - 1)$. Si $n \neq 1$, entonces, según el teorema fundamental del álgebra, $f_1(z)$ tiene al menos una raíz b_2, o sea, para $f_1(z)$ es válida la fórmula

$$f_1(z) = (z - b_2) f_2(z), \tag{7.15^2}$$

donde mediante $f_2(z)$ se denota cierto polinomio de grado $(n - 2)$. Luego, repitiendo dichos razonamientos, obtenemos las fórmulas

$$f_2(z) = (z - b_3) f_3(z), \tag{7.15^3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{n-1}(z) = (z - b_n) f_n(z). \tag{7.15^n}$$

En la última de estas fórmulas mediante $f_n(z)$ se denota cierto polinomio de grado nulo, o sea, $f_n(z) = c = \text{const}$. Poniendo en correspondencia las igualdades (7.15^1)—(7.15^n) y teniendo en cuenta que $f_n(z) = c$, tendremos

$$f(z) = (z - b_1)(z - b_2) \ldots (z - b_n)\, c. \tag{7.16}$$

Notemos que la variable compleja c no es igual a cero puesto que, en caso contrario, el polinomio $f(z)$ sea idénticamente igual a cero y no sea polinomio de grado n***).

---

*) Véase la demostración de este teorema en el curso «Funciones de variable compleja».

**) Al mismo tiempo, tomamos, naturalmente, $n > 0$.

***) Aquí empleemos la siguiente afirmación: *si el polinomio* $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$ *es idénticamente igual a cero, todos sus coeficientes son iguales a cero*. En efecto, si $f(z) \equiv 0$, entonces para $z = 0$, obtenemos $a_n = 0$. Pero, entonces $f(z) \equiv z\{a_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\} \equiv 0$. Ya que $z \not\equiv 0$, entonces la expresión entre corchetes es idénticamente igual a cero, de donde, para $z = 0$, obtenemos $a_{n-1} = 0$. Luego, continuando los razonamientos análogos, demostremos que todos los coeficientes son iguales a cero.

De la igualdad (7.16) se deduce evidentemente que $f(b_1) = f(b_2) = \ldots = f(b_n) = 0$, o sea, que cada uno de los números $b_1, b_2, \ldots, b_n$ es raíz del polinomio $f(z)$. Además, de (7.16) es evidente que, cualquiera que sea el número complejo b diferente de $b_1, b_2, \ldots, b_n$, el número complejo $f(b)$ no es igual a cero, puesto que el producto de varios números complejos es igual a cero si, y sólo si, es igual a cero al menos uno de los factores (véase el § 1). De este modo, el polinomio $f(z)$ tiene exactamente n raíces: $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

La igualdad (7.16) permite descomponer el polinomio $f(z)$ en factores. Si conocemos el tipo del polinomio $f(z)$ (7.12), podemos determinar la constante c en la igualdad (7.16). Comparando, en las igualdades (7.16) y (7.12), los coeficientes de z^n, obtenemos $c = c_0$*).

El polinomio (7.12) que tiene $c_0 = 1$ se denomina *reducido*. Para el polinomio reducido la fórmula de descomposición (7.16) toma la forma

$$f(z) = (z - b_1)(z - b_2) \ldots (z - b_n). \qquad (7.17)$$

Comparando la fórmula (7.17) con la (7.12) (cuando $c_0 = 1$), obtenemos las siguientes relaciones:

$$c_1 = -(b_1 + b_2 + \ldots + b_n),$$
$$c_2 = +(b_1b_2 + b_1b_3 + \ldots + b_{n-1}b_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_n = (-1)^n b_1 b_2 \ldots b_n.$$

A continuación, consideraremos *polinomios reducidos*, si no se especifica lo contrario.

§ 3. Raíces múltiples de un polinomio. Criterio de multiplicidad de una raíz

Entre las raíces del polinomio $f(z)$ pueden haber *raíces coincidentes*. Sean $a, b, \ldots, c$ raíces *diferentes* del polinomio reducido $f(z)$. Entonces, en virtud de los resultados del párrafo anterior, para $f(z)$ es válida la descomposición

$$f(z) = (z - a)^\alpha (z - b)^\beta \ldots (z - c)^\gamma. \qquad (7.18)$$

En esta descomposición $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ son ciertos números enteros, cada uno de los cuales no es menor que la unidad con tal que $\alpha + \beta + \ldots + \gamma = n$, donde n es el grado del polinomio $f(z)$.

*) Aquí empleamos la afirmación: *si dos polinomios $a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n$ y $b_0z^n + b_1z^{n-1} + \ldots + b_n$ son idénticamente iguales uno a otro, entonces, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $\ldots$, $a_n = b_n$.* Para demostrarlo, es suficiente aplicar a la diferencia de dichos polinomios la afirmación mencionada en la nota ***) de la página 196.

Si para el polinomio $f(z)$ es válida la descomposición (7.18), *entonces se dice que el número complejo a es raíz de $f(z)$ de multiplicidad α, el número complejo b es raíz de $f(z)$ de multiplicidad β, el número complejo c es raíz de $f(z)$ de multiplicidad γ.*

La raíz de multiplicidad igual a la unidad suele llamarse *de multiplicidad 1* y la raíz de multiplicidad superior a la unidad, *múltiple*.

Se puede dar otra definición equivalente de la raíz de multiplicidad dada: *el número complejo a se denomina raíz de multiplicidad α del polinomio $f(z)$ si para $f(z)$ es válida la representación*

$$f(z) = (z-a)^{\alpha}\varphi(z), \text{ donde } \varphi(a) \neq 0. \qquad (7.19)$$

Nuestro objetivo es formular la condición necesaria y suficiente de que el número complejo a sea raíz del polinomio $f(z)$ de multiplicidad α.

*Denominamos derivada del polinomio $f(z)$ el polinomio $f'(z)$ obtenido por la diferenciación formal**) *de $f(z)$ respecto a z.* Ante todo demostremos la afirmación siguiente.

Lema 1. *Si el número complejo a es raíz de multiplicidad α del polinomio $f(z)$, entonces este número a es raíz de multiplicidad* $(\alpha - 1)$ *del polinomio $f'(z)$.*

OBSERVACION. En particular, cuando $\alpha = 1$, el número a, siendo raíz de multiplicidad 1 de $f(z)$, no es raíz de $f'(z)$.

DEMOSTRACION. Por la condición, para $f(z)$ es válida la representación (7.19). Diferenciando la fórmula (7.19), tendremos

$$f'(z) = \alpha(z-a)^{\alpha-1}\varphi(z) + (z-a)^{\alpha}\varphi'(z),$$

o

$$f'(z) = (z-a)^{\alpha-1}\varphi_1(z), \qquad (7.20)$$

donde

$$\varphi_1(z) = \alpha\varphi(z) + (z-a)\varphi'(z).$$

Puesto que $\varphi_1(a) = \alpha\varphi(a) \neq 0$, la fórmula (7.20) significa que el número a es raíz de multiplicidad $(\alpha - 1)$ del polinomio $f'(z)$. El lema queda demostrado.

Teorema 7.2. *Para que el número complejo a sea raíz de multiplicidad α del polinomio $f(z)$ es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones siguientes:*

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(\alpha-1)}(a) = 0, \quad f^{(\alpha)}(a) \neq 0. \qquad (7.21)$$

DEMOSTRACION. 1) NECESIDAD. Sea a raíz de multiplicidad α del polinomio $f(z)$. Entonces, según el lema 1, el mismo número a es raíz de multiplicidad $(\alpha - 1)$ del polinomio $f'(z)$, es también raíz de multiplicidad $(\alpha - 2)$ del polinomio $f^{(2)}(z)$, . . ., raíz de mul-

*) La diferenciación de $f(z)$ respecto a z se realiza de tal modo como si z fuera variable real.

tiplicidad 1 del polinomio $f^{(\alpha-1)}(z)$, es decir,

$$f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(\alpha-1)}(a)=0.$$

Según la observación del lema 1, el número a no es raíz del polinomio $f^{(\alpha)}(z)$, o sea, $f^{(\alpha)}(a)\neq 0$. Las condiciones (7.21) se cumplen, lo que queda demostrado.

2) SUFICIENCIA. Sean cumplidas las condiciones (7.21). Es necesario demostrar que el número a es raíz de multiplicidad α del polinomio $f(z)$. Ya que $f^{(\alpha-1)}(a)=0$, el número a es raíz del polinomio $f^{(\alpha-1)}(z)$ *de multiplicidad no inferior a la unidad*. Por lo tanto, basándose en el lema 1, el número a es raíz del polinomio $f^{(\alpha-2)}(z)$ *de multiplicidad no inferior a dos*, es raíz del polinomio $f^{(\alpha-3)}(z)$ *de multiplicidad no inferior a tres* y raíz del polinomio $f(z)$ *de multiplicidad no inferior a* α.

Queda por demostrar que la multiplicidad de la raíz a del polinomio $f(z)$ *no es superior a* α. Si esta multiplicidad fuera superior a α, entonces, según el lema 1, la multiplicidad de la raíz a del polinomio $f^{(\alpha-1)}(z)$ sería superior a 1, de donde se desprendería que a es raíz de $f^{(\alpha)}(z)$, o sea, $f^{(\alpha)}(a)=0$, lo que contradice la última de las condiciones (7.21). El teorema queda demostrado.

§ 4. Principio de la separación de raíces múltiples. Algoritmo de Euclides

1. Principio de la separación de raíces múltiples. Planteemos la tarea: para un polinomio dado $f(z)$ que tiene, hablando en general, raíces múltiples, hallar un polinomio $F(z)$ que *tiene las mismas raíces que* $f(z)$, *pero de multiplicidad* 1. Para lograr este fin introduzcamos algunos conceptos nuevos.

Definición 1. *Denominamos* ***divisor*** *de dos polinomios* $f(z)$ *y* $\varphi(z)$ *cualquier polinomio que divide ambos polinomios* $f(z)$ *y* $\varphi(z)$.

Definición 2. *Denominamos* ***máximo común divisor*** *de dos polinomios* $f(z)$ *y* $\varphi(z)$ *un divisor de éstos tal que se divide por cualquier otro divisor de estos dos polinomios.*

Nos ponemos de acuerdo designar el máximo común divisor de dos polinomios $f(z)$ y $\varphi(z)$ por el símbolo $D\{f(z), \varphi(z)\}$.

Observemos que de la definición del máximo común divisor se desprende que él está definido con exactitud de hasta un factor arbitrario constante.

Volviendo a la tarea enunciada al comienzo del presente párrafo, podemos ahora verificar fácilmente que el polinomio buscado $F(z)$ tiene la forma

$$F(z)=\frac{f(z)}{D\{f(z), f'(z)\}}. \tag{7.22}$$

En efecto, sea

$$f(z)=(z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}\ldots(z-c)^{\gamma}, \tag{7.23}$$

donde $a, b, \ldots, c$ son raíces *diferentes*. Entonces, según el teorema 7.2, para el polinomio $f'(z)$ es válida la representación

$$f'(z) = (z-a)^{\alpha-1}(z-b)^{\beta-1}\ldots(z-c)^{\gamma-1}\psi(z), \qquad (7.24)$$

donde $\psi(z)$ no comprende factores $(z-a)$, $(z-b)$, ..., $(z-c)$.

Comparando las fórmulas (7.23) y (7.24) es evidente que

$$D[f(z),\ f'(z)] = (z-a)^{\alpha-1}(z-b)^{\beta-1}\ldots(z-c)^{\gamma-1}. \qquad (7.25)$$

A su vez, comparando las fórmulas (7.23) y (7.25) es evidente que el polinomio $F(z)$ definido por la fórmula (7.22) tiene la forma

$$F(z) = (z-a)(z-b)\ldots(z-c). \qquad (7.26)$$

Por lo tanto, queda demostrado que el polinomio $F(z)$ definido por la fórmula (7.22) tiene las mismas raíces que el polinomio $f(z)$ pero todas las raíces son de multiplicidad 1.

De este modo, la tarea de separar raíces múltiples se reduce a la de construir el polinomio $F(z)$ definido por la fórmula (7.22), valiéndose del polinomio dado $f(z)$.

Ya que el denominador de la fórmula (7.22) comprende el máximo común divisor de dos polinomios $f(z)$ y $f'(z)$, surge el problema de hallar el máximo común divisor de dos polinomios. Pasamos a resolver este problema.

2. Búsqueda del máximo común divisor de dos polinomios (algoritmo de Euclides). Sean dados dos polinomios completamente arbitrarios $f(z)$ y $\varphi(z)$. Se exige hallar su máximo común divisor. Sin limitar la generalidad, consideremos que el grado de $\varphi(z)$ no es superior al grado de $f(z)$. Entonces, al dividir $f(z)$ por $\varphi(z)$ en columna, llegamos a la fórmula (7.13), (véase el § 2)

$$f(z) = \varphi(z)\,q(z) + r_1(z), \qquad (7.27^1)$$

en la cual, como se demuestra en el § 2, el grado del resto $r_1(z)$ es menor que el grado del divisor $\varphi(z)$. Esto nos permite dividir en columna nuevamente $\varphi(z)$ por $r_1(z)$. Como resultado de la división, obtenemos la fórmula análoga a la (7.13):

$$\varphi(z) = r_1(z)\,q_1(z) + r_2(z), \qquad (7.27^2)$$

en la cual el grado del resto $r_2(z)$ es inferior al grado del divisor $r_1(z)$.

Luego, dividimos en columna $r_1(z)$ por $r_2(z)$, etc. Como resultado obtenemos

$$r_1(z) = r_2(z)\,q_2(z) + r_3(z), \qquad (7.27^3)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_{k-2}(z) = r_{k-1}(z)\,q_{k-1}(z) + r_k(z). \qquad (7.27^k)$$

Ya que en toda división en columna el grado del resto disminuirá *al menos en la unidad*, al repetir el proceso descrito un número bas-

tanto grande k veces, obtenemos, que a $(k+1)$-ésimo paso, el resto será igual a cero*), es decir

$$r_{k-1}(z) = r_k(z)\, q_k(z). \qquad (7.27^{k+1})$$

Demostremos que el último resto $r_k(z)$ diferente de cero es el *máximo común divisor de los polinomios* $f(z)$ y $\varphi(z)$.

Basta demostrar dos afirmaciones:

1) los polinomios $f(z)$ y $\varphi(z)$ se dividen por $r_k(z)$ (esto significa que $r_k(z)$ es uno de los divisores de $f(z)$ y $\varphi(z)$);

2) el polinomio $r_k(z)$ se divide por cualquier divisor $r_0(z)$ de los polinomios $f(z)$ y $\varphi(z)$ (esto significa que $r_k(z)$ es el *máximo común divisor* de dichos polinomios).

Para demostrar la afirmación 1), observemos que, en virtud de (7.27^{k+1}), $r_{k-1}(z)$ se divide por $r_k(z)$, y, entonces, conforme a (7.27^k), $r_{k-2}(z)$ se divide por $r_k(z)$ . . . Pasando de esta forma de una igualdad para otra en (7.27^k)—(7.27^1), demostremos, por fin, que $\varphi(z)$ y $f(z)$ se dividen por $r_k(z)$.

Ahora, demostremos la afirmación 2). Sea $r_0(z)$ cualquier divisor de los polinomios $f(z)$ y $\varphi(z)$. En virtud de la igualdad (7.27^1), $r_1(z)$ se divide por $r_0(z)$, y, entonces, conforme a la igualdad (7.27^2), $r_2(z)$ se divide por $r_0(z)$, en virtud de la igualdad (7.27^3), $r_3(z)$ se divide por $r_0(z)$ . . . Pasando de una igualdad para otra en (7.27^1)—(7.27^k), demostremos, en fin, que $r_k(z)$ se divide por $r_0(z)$.

Por lo tanto, hemos argumentado completamente el proceso anteriormente descrito de búsqueda del máximo común divisor de dos polinomios. Este proceso suele llamarse *algoritmo de Euclides*.

EJEMPLO. Hallemos el máximo común divisor de dos polinomios**)

$$f(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 1 \quad \text{y} \quad \varphi(z) = 4z^3 - 6z^2 + 6z - 2.$$

Al dividir $f(z)$ por $\varphi(z)$ en columna, tendremos

$$\begin{array}{r|l}
z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 1 & 4z^3 - 6z^2 + 6z - 2 \\ \cline{2-2}
-\ z^4 - \frac{3}{2}z^3 + \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}z & \frac{1}{4}z - \frac{1}{8} \\ \cline{1-1}
-\frac{1}{2}z^3 + \frac{3}{2}z^2 - \frac{3}{2}z + 1 & \\
-\ -\frac{1}{2}z^3 + \frac{3}{4}z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{4} & \\ \cline{1-1}
\boxed{\frac{3}{4}z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{3}{4}} &
\end{array}$$

*) Si el resto no se anula a algún paso intermedio del proceso descrito, entonces, después de un número k de pasos obtenemos el resto $r_k(z)$ de grado nulo. Entonces, el siguiente resto $r_{k+1}(z)$ es anticipadamente igual a cero (ya que cualquier polinomio se divide por el polinomio de grado nulo).

**) Es fácil ver que $\varphi(z) = f'(z)$.

Después deberíamos dividir $\varphi(z)$ por el polinomio contorneado por la línea punteada. Sin embargo, puesto que el máximo común divisor *se define con exactitud de hasta un factor constante arbitrario*, es conveniente multiplicar el resto contorneado por la línea punteada por 4/3 y dividir $\varphi(z)$ por el polinomio $z^2 - z + 1$. Como resultado, obtenemos

$$\begin{array}{r|l} 4z^3-6z^2+6z-2 & z^2-z+1 \\ \underline{4z^3-4z^2+4z} & \overline{4z-2} \\ -2z^2+2z-2 & \\ \underline{-2z^2+2z-2} & \end{array}$$

el resto es igual a cero.

De este modo, el máximo común divisor de los polinomios $f(z)$ y $\varphi(z)$ es igual a $z^2 - z + 1$, es decir,

$$D[f(z), \varphi(z)] = z^2 - z + 1.$$

OBSERVACIÓN 1. En el ejemplo anteriormente aducido, para que sea más sencillo hemos tomado los polinomios $f(z)$ y $\varphi(z)$ con coeficientes *reales*. Los mismos métodos quedan también en vigor para los polinomios con coeficientes complejos.

OBSERVACIÓN 2. Cabe notar que hasta el presente no tenemos prácticamente métodos numéricos estables para calcular las raíces de polinomios arbitrarios con exactitud dada. Sin embargo, teniendo la información anticipada sobre la posición de la raíz buscada del polinomio en cierto segmento del eje numérico, podemos calcular esta raíz con la exactitud que nos interesa empleando los métodos expuestos en el § 1 del cap. 3 del tomo 2.

§ 5. Desarrollo de la fracción racional propia con coeficientes complejos en la suma de fracciones simples

Se denomina *fracción racional* la razón de dos polinomios algebraicos. La fracción racional se denomina *propia* si el grado del polinomio situado en el numerador es menor que el del polinomio situado en el denominador. En caso contrario, la fracción racional se denomina *impropia*. Como regla, denotamos la fracción racional por el símbolo $\frac{P(z)}{Q(z)}$, tomando $P(z)$ y $Q(z)$ por polinomios algebraicos.

Lema 2. *Sea* $\frac{P(z)}{Q(z)}$ *fracción racional propia cuyo denominador tiene el número complejo a como la raíz de multiplicidad* α, *es decir*,

$$Q(z) = (z - a)^{\alpha}\varphi(z), \text{ donde } \varphi(a) \neq 0. \tag{7.28}$$

Entonces, para esta fracción es válida la siguiente fórmula:

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{A}{(z-a)^{\alpha}}+\frac{\psi(z)}{(z-a)^{\alpha-k}\varphi(z)}, \tag{7.29}$$

donde A es constante compleja igual a $\frac{P(a)}{\varphi(a)}$; k, número entero $\geqslant 1$, y $\psi(z)$, cierto polinomio. Además, la última fracción en el miembro derecho de (7.29) *es propia.*

DEMOSTRACIÓN. Denotemos mediante A el número constante de tipo $A=\frac{P(a)}{\varphi(a)}$*) y consideremos la diferencia

$$\frac{P(z)}{Q(z)}-\frac{A}{(z-a)^{\alpha}}.$$

Reduciendo dicha diferencia al denominador común, tendremos

$$\frac{P(z)}{Q(z)}-\frac{A}{(z-a)^{\alpha}}=\frac{P(z)-A\varphi(z)}{(z-a)^{\alpha}\varphi(z)}=\frac{\Phi(z)}{(z-a)^{\alpha}\varphi(z)}, \tag{7.30}$$

donde se denota mediante $\Phi(z)$ el polinomio de tipo $\Phi(z)=P(z)-A\varphi(z)$. Ya que $\Phi(a)=P(a)-A\varphi(a)=0$, el número complejo a es *raíz del polinomio* $\Phi(z)$ de cierta multiplicidad $k\geqslant 1$, o sea,

$$\Phi(z)=(z-a)^{k}\psi(z),\ \text{donde}\ \psi(a)\neq 0. \tag{7.31}$$

Poniendo la expresión (7.31) en la fórmula (7.30), tendremos

$$\frac{P(z)}{Q(z)}-\frac{A}{(z-a)^{\alpha}}=\frac{\psi(z)}{(z-a)^{\alpha-k}\varphi(z)}. \tag{7.32}$$

Por lo tanto, la fórmula (7.29) queda demostrada. Falta sólo cerciorarse de que la fracción situada en el miembro derecho de (7.32) es propia. Esto se desprende directamente de que *la diferencia de dos fracciones propias es fracción propia***).

El lema 2 queda demostrado.

Del lema 2 se desprende directamente el siguiente teorema notable que demuestra la posibilidad de desarrollar la fracción racional propia en la suma de fracciones simples.

Teorema 7.3. *Sea $\frac{P(z)}{Q(z)}$ fracción racional propia cuyo denominador tiene la forma*

$$Q(z)=(z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}\ldots(z-c)^{\gamma}. \tag{7.33}$$

---

*) El número A tiene sentido, ya que $\varphi(a)\neq 0$ en virtud de (7.28).

**) Es fácil cerciorarse de esto reduciendo la diferencia de fracciones propias al denominador común.

Entonces, para esta fracción es válida la siguiente expresión:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A_1}{(z-a)^{\alpha}} + \frac{A_2}{(z-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha}}{(z-a)} + \\ + \frac{B_1}{(z-b)^{\beta}} + \frac{B_2}{(z-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta}}{(z-b)} + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ + \frac{C_1}{(z-c)^{\gamma}} + \frac{C_2}{(z-c)^{\gamma-1}} + \ldots + \frac{C_{\gamma}}{(z-c)}. \quad (7.34)$$

En esta expresión $A_1, A_2, \ldots, A_{\alpha}, B_1, B_2, \ldots, B_{\beta}, \ldots, C_1, C_2, \ldots, C_{\gamma}$ *son ciertos números complejos constantes, algunos de los cuales pueden ser iguales a cero.*

DEMOSTRACIÓN. Primero, apliquemos el lema 2 a la fracción $\frac{P(z)}{Q(z)}$, teniendo en cuenta que el número complejo a es raíz de $Q(z)$ de multiplicidad α. Con esto, obtenemos la igualdad (7.32). Al miembro derecho de esta igualdad volvamos a aplicar el lema 2, teniendo en cuenta que el número complejo a es raíz de multiplicidad $\alpha - k$ (para $\alpha - k > 0$) del denominador de dicho miembro derecho o, en virtud de la descomposición (7.33), el número complejo b es raíz de multiplicidad β (para $\alpha - k = 0$) de este denominador. Como resultado, obtenemos la igualdad análoga a (7.32). A su miembro derecho puede aplicarse nuevamente el lema 2. Continuando los razonamientos análogos (o sea, aplicando sucesivamente el lema 2 respecto a todas las raíces de $Q(z)$), obtenemos, para la fracción $\frac{P(z)}{Q(z)}$, la expresión (7.34). El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. Ya que en el lema 2 el número k puede ser mayor que la unidad y el polinomio $P(z)$ puede tener raíces coincidentes con las de $Q(z)$, entonces, en la fórmula (7.34), algunos de los coeficientes $A_1, \ldots, A_{\alpha}, B_1, \ldots, B_{\beta}, \ldots, C_1, \ldots, C_{\gamma}$ pueden ser iguales a cero.

§ 6. Descomposición del polinomio algebraico con coeficientes reales en un producto de factores reales irreductibles

Hemos examinado anteriormente el desarrollo de una fracción racional con coeficientes *complejos* en una suma de fracciones simples. Ahora nuestro objetivo es hallar el desarrollo de la fracción racional con coeficientes *reales* en una suma de fracciones simples con coeficientes *reales*.

Para lograr esto, ante todo debemos hallar la descomposición del polinomio algebraico con coeficientes reales en un producto de

factores reales irreductibles. Este problema se examina en el presente párrafo.

Sea

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \ldots + c_n \qquad (7.35)$$

polinomio algebraico reducido con coeficientes *reales* $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Ante todo, demostremos el siguiente teorema.

Teorema 7.4. Si el número complejo a es raíz del polinomio algebraico con coeficientes reales (7.35), *entonces, el número complejo conjugado de él**) $\bar{a}$ *es también raíz del polinomio* (7.35). *Además, si la raíz compleja a es de multiplicidad* λ, *entonces, la raíz* $\bar{a}$ *también es, de la misma multiplicidad.*

DEMOSTRACIÓN. Demostremos, ante todo la siguiente afirmación auxiliar: si $f(z)$ es polinomio con coeficientes reales, entonces la magnitud compleja $f(\bar{z})$ es conjugada respecto a la magnitud $f(z)$. Basta demostrar que, para cualquier número n, la magnitud $(\bar{z})^n$ es conjugada respecto a la magnitud z^n. Lo último se desprende inmediatamente de la forma trigonométrica del número complejo. En efecto, sea

$$z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

Entonces

$$\bar{z} = \rho\,[\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta)].$$

En virtud de la fórmula de Moivre (7.11),

$$z^n = \rho^n(\cos\theta n + i\,\mathrm{sen}\,\theta\,n),$$

$$(\bar{z})^n = \rho^n\,[\cos(-\theta n) + i\,\mathrm{sen}(-\theta n)] = \rho^n(\cos\theta n - i\,\mathrm{sen}\,\theta n).$$

Comparando dos últimas fórmulas se desprende que $(\bar{z})^n$ es magnitud conjugada respecto a z^n. La afirmación auxiliar queda demostrada.

Sea ahora que el número complejo a es raíz del polinomio $f(z)$, o sea, $f(a) = 0$. En el § 1 de este capítulo hemos deducido que el número complejo es igual a cero si, y sólo si, es igual a cero el número conjugado de él. Por lo tanto, se desprende de la igualdad $f(a) = 0$ y de la afirmación auxiliar anteriormente demostrada que $f(\bar{a}) = 0$, o sea, el número $\bar{a}$ es raíz de $f(z)$.

Sea dado que la multiplicidad de la raíz a es igual a λ. Entonces, en virtud del teorema 7.2,

$$f(a) = f'(a) = f^{(2)}(a) = \ldots = f^{(\lambda-1)}(a) = 0; \quad f^{(\lambda)}(a) \neq 0. \qquad (7.36)$$

Ya que el número complejo es igual a cero si, y sólo si, es igual a cero el número conjugado de él, entonces, de la afirmación auxiliar anteriormente demostrada y de las relaciones (7.36) se desprenden las

*) A continuación, siempre denotaremos el número complejo conjugado por el mismo símbolo que el número dado, pero con una raya por arriba de éste.

relaciones siguientes*):

$$f(\bar{a}) = f'(\bar{a}) = f^{(2)}(\bar{a}) = \ldots = f^{(\lambda-1)}(\bar{a}) = 0, \quad f^{(\lambda)}(\bar{a}) \neq 0. \qquad (7.37)$$

En virtud del teorema 7.2, las relaciones (7.37) significan que el número $\bar{a}$ es raíz de $f(z)$ de multiplicidad λ. El teorema 7.4 queda demostrado.

Empleando el teorema 7.4, hallemos la descomposición del polinomio $f(x)$ con coeficientes reales**) en un producto de factores reales irreductibles. Sea que el polinomio $f(x)$ tiene raíces reales $b_1, b_2, \ldots, b_m$ de multiplicidades $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, respectivamente, y pares de raíces complejos conjugados a_1 y $\bar{a}_1$, a_2 y $\bar{a}_2$, ..., a_n y $\bar{a}_n$ de multiplicidades $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ para todo par respectivamente.

Entonces, según los resultados del § 3, el polinomio $f(x)$ puede representarse en la forma

$$f(x) = (x-b_1)^{\beta_1}(x-b_2)^{\beta_2}\ldots(x-b_m)^{\beta_m}(x-\bar{a}_1)^{\lambda_1}\times$$
$$\times(x-a_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2}(x-\bar{a}_2)^{\lambda_2}\ldots(x-a_n)^{\lambda_n}(x-\bar{a}_n)^{\lambda_n}. \qquad (7.38)$$

Denotemos las partes real e imaginaria de la raíz a_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) por u_k y v_k, respectivamente, es decir, sea que $a_k = u_k + iv_k$. Entonces, $\bar{a}_k = u_k - iv_k$. Para cualquier $k = 1, 2, \ldots, n$, transformemos la expresión

$$(x-a_k)^{\lambda_k}(x-\bar{a}_k)^{\lambda_k} = [(x-a_k)(x-\bar{a}_k)]^{\lambda_k} =$$
$$= [(x-u_k-iv_k)(x-u_k+iv_k)]^{\lambda_k} =$$
$$= [(x-u_k)^2+v_k^2]^{\lambda_k} = (x^2+p_kx+q_k)^{\lambda_k}, \qquad (7.39)$$

donde

$$p_k = -2u_k, \quad q_k = u_k^2+v_k^2.$$

Poniendo (7.39) en (7.38), obtenemos definitivamente la siguiente descomposición del polinomio $f(x)$ en el producto de factores reales irreductibles:

$$f(x) = (x-b_1)^{\beta_1}(x-b_2)^{\beta_2}\ldots(x-b_m)^{\beta_m}\times$$
$$\times(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\lambda_2}\ldots(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}. \qquad (7.40)$$

Llegamos a la conclusión de que el polinomio $f(x)$ con coeficientes reales se descompone en el producto (7.40) de factores irreductibles con tal que los factores correspondientes a las raíces reales tienen

*) Además, tomamos en consideración que la derivada del polinomio con coeficientes reales es también polinomio con coeficientes reales.

**) A continuación, tendremos que tratar con polinomios de la variable que toma *solamente valores reales.* Por eso, para designarla es más conveniente emplear la letra x y no z.

forma de binomios en potencias iguales a la multiplicidad de raíces, y los factores correspondientes a los pares de raíces complejos tienen forma de trinomios cuadrados en potencias iguales a la multiplicidad de estos pares de raíces.

§ 7. Desarrollo de la fracción racional propia con coeficientes reales en una suma de fracciones simples con coeficientes reales

Tienen lugar dos afirmaciones siguientes.

Lema 3. *Sea* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *fracción racional propia con coeficientes reales cuyo denominador tiene el número real a como raíz de multiplicidad* α, *es decir,*

$$Q(x)=(x-a)^{\alpha}\varphi(x), \text{ donde } \varphi(a)\neq 0.$$

Entonces, para esta fracción es válida la siguiente expresión:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{\psi(x)}{(x-a)^{\alpha-k}\varphi(x)}. \qquad (7.41)$$

En esta expresión, A es número real igual a $A=\frac{P(a)}{\varphi(a)}$, *k es número entero* $\geqslant 1$, *y* $\psi(x)$, *cierto polinomio con coeficientes reales con tal que la última fracción en el miembro derecho de* (7.41) *es propia.* El lema 3 no necesita demostración, puesto que se desprende inmediatamente del lema 2. Hay que solamente tener en cuenta que, siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios con coeficientes reales y a, raíz real, los polinomios $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ también tienen coeficientes reales y, por tanto, la constante $A=\frac{P(a)}{\varphi(a)}$ es real.

Lema 4. *Sea* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *fracción racional propia con coeficientes reales cuyo denominador* $Q(x)$ *tiene los números complejos* $a=u+iv$ y $\bar{a}=u-iv$ *como raíces de multiplicidad* λ, *es decir,*

$$Q(x)=(x^2+px+q)^{\lambda}\varphi(x), \text{ donde } \varphi(a)\neq 0,$$

$$\varphi(\bar{a})\neq 0, \quad p=-2u, \quad q=u^2+v^2. \qquad (7.42)$$

Entonces, para esta fracción es válida la siguiente representación:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}+\frac{\psi(x)}{(x^2+px+q)^{\lambda-k}\varphi(x)}. \qquad (7.43)$$

En esta expresión M y N son ciertas constantes reales, k es número entero $\geqslant 1$, *y* $\psi(x)$ *es un polinomio con coeficientes reales con tal que la última fracción en el miembro derecho de* (7.43) *es propia.*

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 4. Nos ponemos de acuerdo designar la parte real de la magnitud compleja A por el símbolo $\mathrm{Re}[A]$, la

parte imaginaria, por el símbolo Im $[A]$. Pongamos*)

$$M=\frac{1}{v}\,\mathrm{Im}\left[\frac{P(a)}{\varphi(a)}\right],\quad N=\mathrm{Re}\left[\frac{P(a)}{\varphi(a)}\right]-\frac{u}{v}\,\mathrm{Im}\left[\frac{P(a)}{\varphi(a)}\right].$$

No es difícil verificar que dichas M y N son la solución de la siguiente ecuación:

$$P(a)-(Ma+N)\,\varphi(a)=0. \qquad (7.44)$$

En efecto, al dividir esta ecuación por $\varphi(a)$ y al igualar a cero las partes reales e imaginarias, obtenemos dos igualdades

$$\left.\begin{aligned} Mu+N&=\mathrm{Re}\left[\frac{P(a)}{\varphi(a)}\right],\\ Mv&=\mathrm{Im}\left[\frac{P(a)}{\varphi(a)}\right],\end{aligned}\right\}$$

empleando las cuales determinamos M y N, anteriormente puestos. Ahora consideremos la diferencia

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda}.$$

Reduciendo dicha diferencia al denominador común, tendremos

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda}=\frac{P(x)-(Mx+N)\,\varphi(x)}{(x^2+px+q)^\lambda\,\varphi(x)}=$$

$$=\frac{\Phi(x)}{(x^2+px+q)^\lambda\,\varphi(x)}, \qquad (7.45)$$

Aquí, mediante $\Phi(x)$ se denota el polinomio con coeficientes reales de tipo $\Phi(x)=P(x)-(Mx+N)\,\varphi(x)$. La igualdad (7.44) permite afirmar que el número complejo a, y, por lo tanto, en virtud del teorema 7.4, el número $\bar{a}$ conjugado de él son raíces del polinomio $\Phi(x)$ de cierta multiplicidad $k\geqslant 1$. En este caso, para el polinomio $\Phi(x)$ es válida la representación

$$\Phi(x)=(x^2+px+q)^k\,\psi(x), \qquad (7.46)$$

donde $\psi(x)$ es cierto polinomio con coeficientes reales que no tiene los números a y $\bar{a}$ como raíces. Poniendo la expresión (7.46) en la fórmula (7.45), obtenemos la expresión (7.43). La última fracción situada en el miembro derecho de (7.43) es propia lo que se desprende de que esta fracción es igual a la diferencia de dos fracciones propias.

El lema 4 queda demostrado.

*) En virtud de (7.42), $\varphi(a)\neq 0$, así que se puede considerar la relación $P(a)/\varphi(a)$.

La aplicación sucesiva de los lemas 3 y 4 a la fracción $P(x)/Q(x)$ respecto a todas las raíces del denominador nos lleva a la siguiente afirmación notable.

Teorema 7.5. *Sea* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *fracción racional propia con coeficientes reales cuyo denominador tiene la forma*

$$Q(x) = (x-b_1)^{\beta_1}(x-b_2)^{\beta_2}\dots(x-b_m)^{\beta_m}\times \times(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}\dots(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}.$$

Entonces, para esta fracción es válido el siguiente desarrollo en la suma de fracciones simples:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B_1^{(1)}}{(x-b_1)} + \frac{B_2^{(1)}}{(x-b_1)^2} + \dots + \frac{B_{\beta_1}^{(1)}}{(x-b_1)^{\beta_1}} + \dots$$
$$\dots + \frac{B_1^{(m)}}{(x-b_m)} + \frac{B_2^{(m)}}{(x-b_m)^2} + \dots + \frac{B_{\beta_m}^{(m)}}{(x-b_m)^{\beta_m}} +$$
$$+ \frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)} + \frac{M_2^{(1)}x+N_2^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots +$$
$$+ \frac{M_{\lambda_1}^{(1)}+N_{\lambda_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}} + \dots + \frac{M_1^{(n)}x+N_1^{(n)}}{(x^2+p_nx+q_n)} +$$
$$+ \frac{M_2^{(n)}x+N_2^{(n)}}{(x^2+p_nx+q_n)^2} + \dots + \frac{M_{\lambda_n}^{(n)}x+N_{\lambda_n}^{(n)}}{(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}}. \qquad (7.47)$$

En este desarrollo $B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \dots, B_{\beta_m}^{(m)}, M_1^{(1)}, N_1^{(1)}, \dots, M_{\lambda_n}^{(n)}, N_{\lambda_n}^{(n)}$ *son ciertas constantes reales, una parte de las cuales pueden ser iguales a cero.*

OBSERVACIÓN. Para determinar concretamente las constantes que acabamos de mencionar, hay que reducir la igualdad (7.47) al denominador común y, después, comparar los coeficientes de potencias iguales de x en los numeradores.

EJEMPLOS Y EXPLICACIONES.

1°. Desarróllense la fracción propia

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

en la suma de fracciones simples.

Al cerciorarse de que el trinomio cuadrático x^2+x+1 tiene raíces complejas, buscamos, según el teorema 7.5, el desarrollo en la forma

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2((x^2+x+1)} = \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$$

Reduciendo la igualdad (7.48) al denominador común, obtenemos

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{B_1(x^3-1)+B_2(x^2+x+1)+(Mx+N)(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)}.$$

Comparando los coeficientes de x^0, x^1, x^2 y x^3 en los numeradores, llegamos al sistema de ecuaciones*)

$$\left.\begin{aligned} B_1+M&=2,\\ B_2+N-2M&=4,\\ B_2+M-2N&=1,\\ -B_1+B_2+N&=2.\end{aligned}\right\}$$

Resolviendo este sistema, hallemos $B_1=2$, $B_2=3$, $M=0$, $N=1$. Definitivamente, obtenemos

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2+x+1}. \quad (7.49)$$

El método para hallar el desarrollo de la fracción racional propia que acabamos de ilustrar se denomina *método de coeficientes indeterminados*. Siempre lleva al objetivo; no es necesario demostrar la resolubilidad del sistema de ecuaciones obtenido después de aplicar este método. La resolubilidad se desprende del teorema 7.5.

2°. Ilustremos el método de coeficientes indeterminados con otro ejemplo. Se necesita hallar el desarrollo de la fracción propia

$$\frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2}.$$

Ya que el trinomio cuadrado x^2+1 tiene raíces complejas, buscamos, según el teorema 7.5, el desarrollo en la forma

$$\frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{B}{x-2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Reducimos la última igualdad al denominador común y después comparamos sus numeradores. Obtenemos

$$3x^4+2x^3+3x^2-1=B(x^4+2x^2+1)+\\ +(M_1x+N_1)(x^3-2x^2+x-2)+(M_2x+N_2)(x-2).$$

Comparando los coeficientes de x^0, x^1, x^2, x^3 y x^4, llegamos al sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} B+M_1&=3,\\ N_1-2M_1&=2,\\ 2B+M_1-2N_1+M_2&=3,\\ N_1-2M_1+N_2-2M_2&=0,\\ B-2N_1-2N_2&=-1.\end{aligned}\right\}$$

*) Al mismo tiempo, usamos la afirmación enunciada en la nota de la pág. 196.

Resolviendo este sistema, hallemos $B = 3$, $M_1 = 0$, $N_1 = 2$, $M_2 = 1$ y $N_2 = 0$. En definitiva, obtenemos

$$\frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}. \qquad (7.50)$$

3°. Como se desprende de los ejemplos considerados, el método de coeficientes indeterminados es bastante laborioso. Por eso cuando es posible, es lógico hallar otro método más simple para buscar coeficientos en el dasarrollo de la fracción racional propia en la suma de las fracciones simples. Sea que el denominador $Q(x)$ de la fracción racional propia $P(x)/Q(x)$ tiene el número real a como la raíz de multiplicidad α. Entonces, entre las fracciones simples que integran la suma del desarrollo de la fracción $P(x)/Q(x)$ habrá la fracción

$$\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}. \qquad (7.51)$$

Señalemos un método muy simple para calcular el coeficiente A de esta fracción simple. Empleando el lema 3 y la fórmula (7.41), nos cercioramos de que el coeficiento A es igual a

$$A = P(a)/\varphi(a), \quad \text{donde } \varphi(x) = Q(x)/(x-a)^{\alpha}.$$

Llegamos a la regla siguiente: *para calcular el coeficiente A de la fracción simple* (7.51) *correspondiente a la raíz real a de multiplicidad α del polinomio $Q(x)$, hay que eliminar el factor $(x-a)^{\alpha}$ en el denominador de la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y en la expresión restante tomar $x = a$.*

Dicho procedimiento de buscar el coeficiente A suele llamarse *método de eliminación*. Señalemos que este procedimiento es aplicable solamente a los cálculos de coeficientes de *potencias superiores de fracciones simples correspondientes a las raíces de $Q(x)$*.

El método de eliminación es espacialmente eficaz si el denominador $Q(x)$ *tiene solamente raíces reales de multiplicidad* 1, es decir, si $Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$. Entonces, como sabemos, es válido el desarrollo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_k}{x-a_k} + \ldots + \frac{A_n}{x-a_n},$$

cuyos coeficientes pueden calcularse por el método de eliminación. Para calcular el coeficiente A_k debemos eliminar el factor $(x-a_k)$ en el denominador de la fracción $P(x)/Q(x)$ y en la expresión restante tomar $x = a_k$.

EJEMPLO. Hállese el desarrollo de la fracción

$$\frac{x+1}{(x-1)x(x-2)}. \qquad (7.52)$$

Según el teorema 7.5, ponemos

$$\frac{x+1}{(x-1)\,x\,(x-2)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x}+\frac{A_3}{x-2}.$$

Para hallar A_1, eliminamos, en la expresión (7.52), el factor $(x-1)$ y en la expresión restante tomamos $x=1$. Obtenemos $A_1=-2$. De modo análogo, hallamos $A_2=1/2$, $A_3=3/2$.

En definitiva, obtenemos

$$\frac{x+1}{(x-1)\,x\,(x-2)}=\frac{-2}{x-1}+\frac{1}{2x}+\frac{3}{2(x-2)}. \qquad (7.53)$$

§ 8. Problema de integración de la fracción racional

Ahora estamos preparados para resolver, en forma general, el problema de integración de la fracción racional con coeficientes réales.

Ante todo, notemos que este problema se reduce al problema de integración *solamente de la fracción racional propia* puesto que toda fracción racional impropia puede representarse (mediante la división del numerador por el denominador «en columna») en forma de la suma del polinomio algebraico y la fracción racional propia.

EJEMPLO.

$$\frac{x^4-x^3+1}{x^2+x+2}=(x^2-2x)+\frac{4x+1}{x^2+x+2},$$

ya que

$$\begin{array}{rl}
-\;\; x^4-x^3+1 & \big|\,\underline{x^2+x+2}\\
\underline{x^4+x^3+2x^2} & \;\; x^2-2x\\
-\;\; -2x^3-2x^2+1 & \\
\underline{-2x^3-2x^2-4x} & \\
\text{el resto}\quad 1+4x &
\end{array}$$

Sabemos integrar el polinomio (recordemos que la integral indefinida del polinomio es cierto polinomio de potencia que es más alta en una unidad). Queda por aprender a integrar la fracción racional *propia*. En virtud del teorema 7.5, el problema de integración de la fracción racional propia se reduce a la integración de fracciones simples de *cuatro tipos siguientes*:

$$\text{I. } \frac{B}{x-b},\quad \text{II. } \frac{B}{(x-b)^{\beta}},\quad \text{III. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)},\quad \text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}. \qquad (7.54)$$

Aquí $\beta=2, 3, \ldots$; $\lambda=2, 3, \ldots$; B, M, N, b, p y q son ciertos números reales con tal que el trinomio x^2+px+q no tiene raíces reales, es decir, $q-\frac{p^2}{4}>0$.

Demostremos que cada una de las cuatro fracciones mencionadas es integrable en funciones elementales.

Las fracciones de tipo I y II se integran fácilmente empleando la sustitución $t = x - b$. Obtenemos

$$\int \frac{B}{x-b}\,dx = B\int \frac{dt}{t} = B\ln|t| + C = B\ln|x-b| + C, \qquad (7.55)$$

$$\int \frac{B}{(x-b)^{\beta}}\,dx = B\int \frac{dt}{t^{\beta}} = -\frac{B}{(\beta-1)}\,\frac{1}{t^{\beta-1}} + C =$$

$$= \frac{-B}{(\beta-1)}\,\frac{1}{(x-b)^{\beta-1}} + C. \qquad (7.56)$$

Para calcular la integral de la fracción de tipo III, representemos el trinomio cuadrático en la forma $(x^2+px+q) = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)$ y, teniendo en cuenta que $q - \frac{p^2}{4} > 0$, introduzcamos en consideración la constante real $a = +\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$. Haciendo la sustitución $t = x + \frac{p}{2}$, tendremos

$$\int \frac{(Mx+N)}{(x^2+px+q)}\,dx = \int \frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{t^2+a^2}\,dt =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2t\,dt}{t^2+a^2} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\frac{t}{a}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p}{4}}} + C. \qquad (7.57)$$

Queda por calcular la integral de la fracción de tipo IV. Empleando las denotaciones anteriormente introducidas $t = x + \frac{p}{2}$, $a = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$, obtenemos

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}\,dx = \int \frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^{\lambda}}\,dt =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^{\lambda}} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{\lambda}}.$$

La integral que nos interesa será calculada si se calculan las integrales

$$I=\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^{\lambda}}, \quad K_{\lambda}=\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{\lambda}}.$$

La integral I se toma elemantalmente:

$$I=-\frac{1}{(\lambda-1)}\,\frac{1}{(t^2+a^2)^{\lambda-1}}+C=-\frac{1}{(\lambda-1)}\,\frac{1}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}}+C.$$

La integral K_{λ} fue calculada en el ejemplo 6 al final del § 2 del cap. 6. Allí, hemos obtenido para esta integral, la fórmula recurrente (6.12) que parmite calcular sucesivamente K_{λ} para cualquier $\lambda=2, 3, \ldots$ basándose en que

$$K_1=\int \frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

Así pues, hemos calculado las integrales de todas las cuatro fracciones simples (7.54) y hemos demostrado que cada una de estas integrales es *función elemental**). Por lo tanto, llagamos al siguiente teorama que resuelve el problema de integración de la fracción racional.

Teorema 7.6. Toda fracción racional es integrable en funciones elementales.

Para concluir este párrafo, examinemos ejemplos para calcular las integrales indefinidas de fracciones racionales. Calculemos las integrales indefinidas de tres fracciones consideradas en el párrafo anterior (7.49), (7.50) y (7.53). Empleando tres fórmulas mencionadas, así como las fórmulas (7.55), (7.56) y (7.57), tendremos:

1. $$\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\,dx=\int \frac{2}{x-1}\,dx+ \\ +\int \frac{3}{(x-1)^2}\,dx+\int \frac{dx}{x^2+x+1}=2\ln|x-1|- \\ -\frac{3}{x-1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

2. $$\int \frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx=\int \frac{3}{x-2}\,dx+ \\ +\int \frac{2dx}{x^2+1}+\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}=3\ln|x-2|+ \\ +2\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}=3\ln|x-2|+ \\ +2\operatorname{arctg}x-\frac{2}{(x^2+1)}+C.$$

*) Se expresa más exacto por el logaritmo, arco tangente, y la función racional.

$$\int \frac{x+1}{(x-1)\,x\,(x-2)}\,dx = \int \frac{-2}{x-1}\,dx + \int \frac{dx}{2x} + \int \frac{3}{2(x-2)}\,dx = -2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-2| + C.$$

§ 9. Método de Ostrogradski

M. V. Ostrogradski*) propuso un método ingenioso de separar la *parte racional* de la integral de la fracción racional propia $P(x)/Q(x)$.

Analizando la forma de las integrales de cuatro fracciones simples (7.54), se puede hacer las deducciones siguientes:

1) Las integrales de las fracciones de tipo I y III cuyos denominadores comprenden binomio o trinomio en primera potencia, respectivamente, *son funciones trascendentes* (son iguales al logaritmo o al arco tangente).

2) La integral de la fracción de tipo II cuyo denominador comprende un binomio en potencia $\beta > 1$ *es fracción racional propia con el denominador igual al mismo binomio en potencia* $\beta - 1$.

3) La integral de tipo IV cuyo integrando comprende en el denominador un trinomio en potencia λ resulta**) ser *igual a la suma de la fracción racional propia con el denominador igual al mismo trinomio en potencia* $\lambda - 1$ *y la integral que se reduce al arco tangente* const $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)}$.

Las deducciones 1), 2), 3) permiten concluir a qué es igual la parte racional de toda la integral de la fracción propia $P(x)/Q(x)$ que, además, se considera *irreducible*. Sea que el denominador $Q(x)$ tiene la forma

$$Q(x) = (x-b_1)^{\beta_1} \ldots (x-b_m)^{\beta_m} (x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1} \ldots (x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}. \quad (7.58)$$

Entonces, la parte racional de la integral de la fracción racional propia $P(x)/Q(x)$ es igual a la suma de fracciones racionales propias cuyos denominadores son respectivamente iguales a

$$(x-b_1)^{\beta_1-1}, \ldots, (x-b_m)^{\beta_m-1},$$
$$(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1-1}, \ldots, (x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n-1}.$$

La parte racional de la integral de la fracción $P(x)/Q(x)$ es, obviamente, la fracción racional propia $P_1(x)/Q_1(x)$ cuyo denominador

*) M. V. Ostrogradski, matemático ruso (1801—1861).

**) Tomando en consideración la fórmula recurrente (6.12) obtenida en la parte final del § 2 del cap. 6.

$Q_1(x)$ tiene la forma

$$Q_1(x)=(x-b_1)^{\beta_1-1}\ \dots\ (x-b_m)^{\beta_m-1}\times$$
$$\times(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1-1}\ \dots\ (x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n-1}. \qquad (7.59)$$

Calculemos ahora la suma de las fracciones simples cuyas integrales son funciones trascendentes. De las deducciones 1) y 3) se deduce que esta suma es igual a la fracción racional propia $P_2(x)/Q_2(x)$ cuyo denominador $Q_2(x)$ es igual a

$$Q_2(x)=(x-b_1)\ \dots\ (x-b_m)(x^2+p_1x+q_1)\ \dots$$
$$\dots\ (x^2+p_nx+q_n). \quad (7.60)$$

De este modo, llegamos a la siguiente fórmula que fue obtenida por primera vez por M. V. Ostrogradski:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx. \qquad (7.61)$$

En la fórmula de Ostrogradski los polinomios $Q_1(x)$ y $Q_2(x)$ se determinan por las fórmulas (7.59) y (7.60) y pueden calcularse sin *descomponer el polinomio $Q(x)$ en el producto de factores irreductibles.*

En efecto, conforme a los resultados del § 4 (véase la fórmula (7.25)), el polinomio $Q_1(x)$ es el máximo común divisor de dos polinomios $Q(x)$ y $Q'(x)$ y puede calcularse valiéndose del algoritmo de Euclides (véase el § 4).

En virtud de las fórmulas (7.58), (7.59) y (7.60), el polinomio $Q_2(x)$ es el cociente $Q(x)/Q_1(x)$ y puede calcularse dividiendo $Q(x)$ por $Q_1(x)$ «en columna».

Queda por calcular los polinomios $P_1(x)$ y $P_2(x)$. Puesto que las fracciones $P_1(x)/Q_1(x)$ y $P_2(x)/Q_2(x)$ son propias, es lógico prefijar el polinomio $P_1(x)$ como polinomio con coeficientes indeterminados de grado inferior en una unidad que $Q_1(x)$, y $P_2(x)$, como polinomio con coeficientes indeterminados de grado inferior en una unidad que $Q_2(x)$. Para calcular dichos coeficientes indeterminados se debe diferenciar la fórmula de Ostrogradski (7.61), reducir el resultado al denominador común y comparar los coeficientes de potencias iguales de x en el numerador.

De este modo, el método de Ostrogradski es un procedimiento ingenioso para integrar una fracción racional sin desarrollarla anticipadamente en la suma de las simples. Este procedimiento es especialmente eficaz si las raíces de $Q(x)$ son, en la mayoría, múltiples o si es difícil hallar las raíces de $Q(x)$.

EJEMPLO. Calcular por el método de Ostrogradski

$$\int\frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}\,dx.$$

Tenemos

$$Q(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1,$$
$$Q'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 2.$$

Buscamos $Q_1(x)$ como el máximo común divisor de los polinomios $Q(x)$ y $Q'(x)$. Observemos que el máximo común divisor precisamente de estos dos polinomios ya fue hallado en el ejemplo considerado en la parte final del § 4. Es igual a

$$Q_1(x) = x^2 - x + 1.$$

Al dividir $Q(x)$ por $Q_1(x)$ «en columnas», hallamos

$$Q_2(x) = x^2 - x + 1.$$

Prefijamos $P_1(x)$ y $P_2(x)$ como polinomios de primer grado con coeficientes indeterminados.

La fórmula de Ostrogradski (7.61) toma la forma

$$\int \frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}\,dx = \frac{Ax+B}{x^2-x+1} + \int \frac{Cx+D}{x^2-x+1}\,dx. \quad (7.62)$$

Para determinar los coeficientes A, B, C, D diferenciemos la fórmula (7.62). Obtenemos

$$\frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1} = \frac{A(x^2-x+1)-(Ax+B)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} + \frac{Cx+D}{(x^2-x+1)}.$$

El resultado de diferenciación se reduce al denominador común después de que se comparan los numeradores. Obtenemos

$$6 - 7x - x^2 = A(x^2 - x + 1) - (Ax + B)(2x - 1) + (Cx + D)(x^2 - x + 1).$$

Comparando los coeficientes de x^0, x^1, x^2, y x^3, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$C = 0,$$
$$-A + D - C = -1,$$
$$-2B - D + C = -7,$$
$$A + B + D = 6.$$

Resolviendo este sistema, hallamos $A = 2$, $B = 3$, $C = 0$, $D = 1$. De este modo, la fórmula (7.62) toma la forma

$$\int \frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}\,dx = \frac{2x+3}{x^2-x+1} + \int \frac{dx}{x^2-x+1}.$$

Al calcular la integral en el miembro derecho, hallamos definitivamente

$$\int \frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}\,dx = \frac{2x+3}{x^2-x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

§ 10. Integración de algunas expresiones irracionales y trascendentes

En los párrafos anteriores hemos establecido que la integral de cualquier fracción racional es función elemental. En el párrafo presente consideremos *otras clases de funciones integrables en funciones elementales*. Como regla, haciendo cierta sustitución reduciremos la integral de la función considerada a la integral de la fracción racional. En cuanto a dicha sustitución, decimos que ella racionaliza la integral de la función considerada.

1. Integración de algunas expresiones trigonométricas. Nos ponemos de acuerdo que en adelante siempre designaremos cualquier función racional de dos argumentos x e y *) por el símbolo $R(x, y)$.

En este punto demostremos la integrabilidad en funciones elementales de cualquier función de tipo

$$R(\operatorname{sen} x, \cos x). \tag{7.63}$$

Demostremos que la integral de esta función se racionaliza por la sustitución $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. En efecto,

$$\operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2},$$

así que

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Puesto que la función racional de la función racional es también función racional, entonces la integral del miembro derecho de la última igualdad es integral de la fracción racional.

Siendo universal, la sustitución $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ que racionaliza la integral de la función (7.63), lleva, con frecuencia, a cálculos voluminosos. En relación con esto, señalaremos varios casos particulares en los que se puede racionalizar la integral de la función (7.63) empleando otras sustituciones más simples.

---

*) La función racional de dos argumentos se define del modo siguiente. Se denomina polinomio de grado n de dos argumentos x e y la expresión de forma $P_n(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots + a_{0n}y^n$, donde $a_{00}, a_{10}, a_{01}, \ldots, a_{0n}$ son ciertos números constantes. Se denomina función racional de dos argumentos la expresión de forma $P_n(x, y)/Q_m(x, y)$, donde $P_n(x, y)$ es polinomio arbitrario de dos argumentos de grado n, y $Q_m(x, y)$, polinomio arbitrario de dos argumentos de grado m.

Ante todo, notemos dos propiedades elementales de la función racional de dos argumentos $R(u, v)$:

1°. Si la función racional $R(u, v)$ no cambia su valor al variar el signo de uno de sus argumentos (por ejemplo, u), es decir, si $R(-u, v) = R(u, v)$, entonces, esta función racional puede reducirse a la forma $R(u, v) = R_1(u^2, v)$, donde R_1 es cierta función racional de sus dos argumentos. (Esta función comprende solamente potencias *pares* de u.)

2°. Si, al variar el signo de u, la función $R(u, v)$ también cambia de signo, es decir, $R(-u, v) = -R(u, v)$, entonces, ella se reduce a la forma $R(u, v) = R_2(u^2, v)\,u$. (La propiedad 2° se desprende directamente de la propiedad 1° si la aplicamos a la función $R(u, v)/u$.)

Consideremos ahora el problema de la racionalización de la integral de la función (7.63) para varios casos particulares.

I. Sea que $R(u, v)$ *cambia de signo al variar el signo de* u. Entonces, según la propiedad 2°,

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx = \int R_2(\operatorname{sen}^2 x, \cos x)\operatorname{sen} x\,dx =$$
$$= -\int R_2(1-\cos^2 x, \cos x)\,d(\cos x).$$

De este modo, la integral de la función (7.63) se racionaliza por la sustitución $t = \cos x$.

II. Luego, sea que la función $R(u, v)$ *cambia de signo al variar el signo de* v. Entonces, según la misma propiedad 2°,

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx = \int R_3(\operatorname{sen} x, \cos^2 x)\cos x\,dx =$$
$$= \int R_3(\operatorname{sen} x, 1-\operatorname{sen}^2 x)\,d(\operatorname{sen} x),$$

es decir, la integral de la función (7.63) se racionaliza por la sustitución $t = \operatorname{sen} x$.

III. En fin, sea que la función $R(u, v)$ *no cambia su valor si los signos de* u *y* v *varían simultáneamente*, es decir,

$$R(-u, v) = R(u, v).$$

Demostremos que en este caso la integral de la función (7.63) se racionaliza por la sustitución $t = \operatorname{tg} x$. En efecto, en este caso,

$$R(u, v) = R\left(\frac{u}{v}v, v\right) = R_1\left(\frac{u}{v}, v\right),$$

$$R(-u, -v) = R\left(\frac{u}{v}(-v), -v\right) = R_1\left(\frac{u}{v}, -v\right).$$

De este modo,

$$R_1\left(\frac{u}{v}, -v\right) = R_1\left(\frac{u}{v}, v\right).$$

Pero, entonces, según la propiedad 1°,

$$R_1\left(\frac{u}{v}, v\right) = R_2\left(\frac{u}{v}, v^2\right).$$

En definitiva, obtenemos

$$R(u, v) = R_2\left(\frac{u}{v}, v^2\right).$$

De aquí,

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx = \int R_2(\operatorname{tg} x, \cos^2 x)\,dx =$$
$$= \int R_2\left(\operatorname{tg} x, \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right) dx = \int R_2\left(t, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2},$$

donde $t=\operatorname{tg} x$, $x=\operatorname{arctg} t$, $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$.

EJEMPLOS. 1) Calcúlese la integral $I_1=\int \dfrac{dx}{1+a\cos x}$, donde $a>0$, $a\neq 1$. Aplicando la sustitución trigonométrica universal $t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, obtenemos

$$x=2\operatorname{arctg} t,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$
$$I_1=2\int\frac{dt}{(a+1)+t^2(1-a)}=\frac{2}{a+1}\int\frac{dt}{1+\frac{1-a}{1+a}t^2}.$$

Luego, es necesario considerar dos casos por separado: 1) $0<a<1$, 2) $a>1$. En el caso de que $0<a<1$,

$$I_1=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{arctg}\left(t\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right)+C=$$
$$=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

En el caso de que $a>1$

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\ln\left|\frac{1+t\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}}{1-t\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}}\right|+C=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C.$$

2) Calcúlese la integral $I_2=\int\dfrac{\operatorname{sen} x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x+1}$.

Ya que el integrando cambia de signo al variar el signo de sen x, entonces, según I, hay que hacer la sustitución $t=\cos x$. Como resultado, obtenemos

$$I_2=-\int\frac{dt}{1-t^2+1}=\int\frac{dt}{t^2-2}=$$
$$=\frac{-1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\right|+C=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\cos x+\sqrt{2}}{\cos x-\sqrt{2}}\right|+C.$$

3) Calcúlese la integral $I_3 = \int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x} dx.$

Ya que el integrando conserva el valor si los signos de sen x y cos x varían simultáneamente, entonces, según III, hay que hacer la sustitución $t = \operatorname{tg} x$. Como resultado, obtenemos

$$I_3 = \int \frac{t\,dt}{t^4+1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2)}{(t^2)^2+1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(t^2) + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) + C.$$

2. Integración de irracionalidades fraccionales lineales. En este punto demostraremos la integrabilidad en funciones elementales de cualquier función de tipo

$$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right), \tag{7.64}$$

donde a, b, c y d son ciertas constantes, n es cualquier número positivo entero. La función de esto tipo se denomina *irracionalidad fraccional lineal*.

Demostremos que si $ad - bc \neq 0$ la sustitución $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ racionaliza la integral de la función (7.64). En efecto,

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad x = \frac{dt^n - b}{a - c\cdot t^n}, \quad dx = \frac{(ad-bc)\,nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,dt,$$

así que

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\left(\frac{dt^n - b}{a-ct^n}, t\right) \frac{(ad-bc)\,nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,dt.$$

Ya que la función racional de una función racional es también función racional, entonces, la integral del miembro derecho de la última igualdad es integral de la fracción racional. Por lo tanto, queda demostrado que la integral de la irracionalidad fraccional lineal (7.64) se racionaliza por la sustitución

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

EJEMPLO. Calcúlese la integral $I = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{dx}{1-x}$. Haciendo la sustitución

$$t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad t^2 = \frac{1+x}{1-x}, \quad x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2},$$

obtenemos

$$I = 2\int \frac{t^2\,dt}{t^2+1} = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 2t - 2\operatorname{arctg} t + C = 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

3. Integración de diferenciales binomiales. Se denomina *diferencial binomial* la expresión de forma

$$x^m (a + bx^n)^p \, dx,$$

donde a y b son constantes cualesquiera, y los exponentes de las potencias m, n y p, ciertos números racionales. Examinemos el problema de la integrabilidad en funciones elementales de las diferenciales binomiales.

Ante todo, señalemos *tres casos* cuando la integral de una diferencial binomial admite sustitución que racionaliza.

1°. El primer caso corresponde a *p entero*. La diferencial binomial es irracionalidad fraccional lineal de tipo $R(x, \sqrt[r]{x})\, dx$, donde r es el mínimo común múltiplo de los números racionales m y n. Por lo tanto, en este caso, la sustitución $t = \sqrt[r]{x}$ racionaliza la integral de la diferencial binomial.

2°. El segundo caso corresponde al *número entero* $\frac{m+1}{n}$. Haciendo la sustitución $z = x^n$ y poniendo, para abreviar, $q = \frac{m+1}{n} - 1$, tendremos

$$\int x^m (a+bx^n)^p \, dx = \frac{1}{n} \int (a+bz)^p z^q \, dz. \qquad (7.65)$$

La función subintegral en el miembro derecho de (7.65) es irracionalidad fraccional lineal de forma $R(z, \sqrt[s]{a + bz})$, donde s es el denominador del número racional p.

De este modo, en el segundo caso la diferencial bonomial se racionaliza por la sustitución

$$t = \sqrt[s]{a+bz} = \sqrt[s]{a+bx^n}.$$

3°. El tercer caso corresponde al *número entero* $\left(\frac{m+1}{n} + p\right)$. La función subintegral en el miembro derecho de (7.65) es irracionalidad lineal fraccional de forma $R\left(z, \sqrt[s]{\frac{a+bz}{z}}\right)$, así que la integral de la diferencial binomial se racionaliza por la sustitución de forma

$$t = \sqrt[s]{\frac{a+bz}{z}} = \sqrt[s]{\frac{a}{x^n} + b}.$$

A mediados del siglo pasado P. L. Chebishov *) demostró que *tres casos anteriormente mencionados agotan todos los casos cuando la diferencial binomial se integra en funciones elementales.*

EJEMPLOS. 1). Calcúlese la integral $I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a+bx^2}} = \int x^{-2} \times \times (a+bx^2)^{-1/2} \, dx$. Aquí $m = -2$, $n = 2$, $p = -1/2$, así que $\frac{m+1}{n} + p = -1$ (el tercer caso). Haciendo la sustitución

$$t = \sqrt{\frac{a}{x^2} + b}, \quad x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{t^2 - b}}, \quad dx = -\frac{\sqrt{a}\, t\, dt}{\sqrt{(t^2-b)^3}},$$

tendremos

$$I = \int \left(-\frac{dt}{a}\right) = -\frac{t}{a} + C = -\frac{\sqrt{\frac{a}{x^2}+1}}{a} + C.$$

*) P. L. Chebishov, gran matemático ruso (1821—1894).

2) Calcúlese la integral $I=\int x^5(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$. En este caso $m=5$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$, así que $\frac{m+1}{n}=3$ (el segundo caso). Haciendo la sustitución

$$t=\sqrt{1-x^2},\quad x=\sqrt{1-t^2},\quad dx=-\frac{t\,dt}{1-t^2},$$

tendremos

$$I=-\int(1-t^2)^2\,dt=-\int dt+2\int t^2\,dt-\int t^4\,dt=-t+\frac{2}{3}t^3-\frac{t^5}{5}+C=$$
$$=-\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}-\frac{\sqrt{(1-x^2)^5}}{5}+C.$$

4. Integración de irracionalidades cuadráticas por sustituciones de Euler. En este punto demostremos la integrabilidad en funciones elementales de cualquier función de forma

$$R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right),\tag{7.66}$$

donde a, b y c son ciertas constantes. La función de este tipo se denomina *irracionalidad cuadrática*. Naturalmente, consideremos que el trinomio cuadrático ax^2+bx+c no tiene raíces *iguales* (de lo contrario, la raíz de este trinomio puede sustituirse por una expresión racional).

Demostremos que la integral de la función (7.66) siempre se racionaliza por una de las llamadas *sustituciones de Euler*.

En primer lugar, consideremos el caso cuando el trinomio cuadrático ax^2+bx+c tiene raíces *complejas*. En este caso el signo del trinomio cuadrático coincide con el signo de a, y, debido a que el trinomio cuadrático (de que se extrae la raíz cuadrada) es *positivo* por el sentido, entonces, $a>0$.

De este modo, tenemos derecho hacer la siguiente sustitución:

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}.\tag{7.67}$$

La sustitución (7.67) suele llamarse *primera sustitución de Euler*. Demostremos que esta sustitución racionaliza la integral de la función (7.66) para el caso considerado. Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}$, obtenemos $bx+c=t^2-2\sqrt{a}\,tx$, así que

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b},$$

$$dx=2\,\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}\,dt.$$

De este modo,

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx =$$
$$= \int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}, \frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}\right) 2\,\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}\,dt.$$

En el miembro derecho bajo el signo de la integral está la fracción racional.

Ahora, consideremos el caso cuando el trinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ tiene raíces *reales* no coincidentes x_1 y x_2.

En este caso $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Demostremos que entonces la integral de la función (7.66) se racionaliza haciendo la sustitución

$$t = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1}, \tag{7.68}$$

que suele llamarse *segunda sustitución de Euler*. En efecto, elevando al cuadrado la igualdad $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x - x_1)$ y reduciendo la igualdad obtenida por $(x - x_1)$, obtenemos $a(x - x_2) = t^2(x - x_1)$, así que

$$x = \frac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{a(x_1-x_2)}{t^2-a}\,t,$$
$$dx = \frac{2a(x_1-x_2)\,t}{(t^2-a)^2}\,dt.$$

De este modo,

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx =$$
$$= \int R\left(\frac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a}, \frac{a(x_1-x_2)\,t}{t^2-a}\right) \frac{2a(x_1-x_2)\,t}{(t^2-a)^2}\,dt.$$

En el miembro derecho bajo el signo de la integral, está la fracción racional.

EJEMPLOS. 1) Calcúlese la integral $I = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Puesto que el trinomio cuadrático x^2+x+1 tiene raíces complejas, hagamos la primera sustitución de Euler

$$t = \sqrt{x^2+x+1} + x.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad $\sqrt{x^2+x+1} = t - x$, obtenemos $x^2+x+1 = t^2 - 2tx + x^2$ o $x+1 = t^2 - 2tx$ así que

$$x = \frac{t^2-1}{1+2t}, \quad dx = 2\,\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}\,dt.$$

De este modo,

$$I=2\int \frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}\,dt=\int\left[\frac{A}{t}+\frac{B}{1+2t}+\frac{C}{(1+2t)^2}\right]dt.$$

Los coeficientes indeterminados A, B y C se calculan fácilmente: $A=2$, $B=-3$, $C=-3$. En definitiva, obtenemos

$$I=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|1+2t|+\frac{3}{2(1+2t)}+C=$$
$$=2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}+x\right|-\frac{3}{2}\ln\left|1+2x+\right.$$
$$\left.+2\sqrt{x^2+x+1}\right|+\frac{3}{2(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1})}+C.$$

2) Calcúlese la integral $I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$. Puesto que el trinomio cuadrático $1-2x-x^2$ tiene raíces reales $x_1=-1+\sqrt{2}$ y $x_2=-1-\sqrt{2}$, hagamos la segunda sustitución de Euler (7.68)

$$t=\frac{\sqrt{1-2x-x^2}}{x+1+\sqrt{2}}.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad $\sqrt{1-2x-x^2}=t(x+1+\sqrt{2})$, tendremos $(-1)(x+1-\sqrt{2})=t^2(x+1+\sqrt{2})$, así que

$$x=\frac{-t^2(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}-1}{t^2+1},\quad \sqrt{1-2x-x^2}=\frac{2\sqrt{2}}{t^2+1}\,t,$$
$$1+\sqrt{1-2x-x^2}=\frac{t^2+2\sqrt{2}t+1}{t^2+1},\quad dx=-\frac{4\sqrt{2}t}{(t^2+1)^2}\,dt.$$

De este modo,

$$I=-4\sqrt{2}\frac{t\,dt}{(t^2+1)(t^2+2\sqrt{2}t+1)}.$$

Obtenemos la integral de la fracción racional que puede calcularse por el lector.

5. Integración de irracionalidades cuadráticas mediante otros procedimientos. Aunque las sustituciones de Euler siempre racionalizan la integral de la función (7.66), ellas suelen llevar a cálculos muy voluminosos y complicados. Por eso, en la práctica se usan con frecuencia otros procedimientos de integración de la función (7.66). Estos procedimientos se examinan en el punto presente.

Introduciendo la designación $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ y teniendo en cuenta que y^2 es polinomio, podemos representar la función (7.66) en forma de la suma

$$R(x,\ y)=R_1(x)+R_2(x)/y,$$

donde $R_1(x)$ y $R_2(x)$ son ciertas funciones racionales de una variable. Ya que la integral de $R_1(x)$ se toma (en funciones elementales), es suficiente calcular la integral de la función $R_2(x)/y$.

Ya sabemos *) que toda fracción racional $R_2(x)$ puede representarse en forma de la suma de un polinomio $P(x)$ y la fracción *racional* propia $R_3(x)$. A su vez, la fracción racional propia $R_3(x)$ puede desarrollarse en la suma de fracciones simples. Tomándolo en consideración, podemos afirmar que el problema de integración de la función $R_2(x)/y$ se reduce al cálculo de las integrales de *tres tipos* siguientes:

I. $\int \frac{P(x)}{y}\,dx$, donde $P(x)$ es polinomio.

II. $\int \frac{B}{(x-A)^{\alpha}y}\,dx$, donde A y B son constantes, α es número natural.

III. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}y}\,dx$, donde M, N, p y q son constantes, λ es número natural con tal que $q-\frac{p^2}{4}>0$.

Detengámonos en el cálculo de las integrales de tipo I, II *y* III *por separado.*

1. Para calcular la *integral de tipo* I, ante todo establecemos la fórmula recurrente para la integral

$$I_m=\int \frac{x^m\,dx}{y},\ \text{donde } m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Para hacerlo, suponiendo $m\geqslant 1$, integremos la siguiente identidad que se verifica por la diferenciación:

$$(x^{m-1}y)'=ma\,\frac{x^m}{y}+\left(m-\frac{1}{2}\right)b\,\frac{x^{m-1}}{x}+(m-1)\,c\,\frac{x^{m-2}}{y}.$$

Integrando esta identidad llegamos a la igualdad

$$x^{m-1}y=maI_m+\left(m-\frac{1}{2}\right)bI_{m-1}+(m-1)\,cI_{m-2}. \tag{7.69}$$

Tomando $m=1$ en la igualdad (7.69), hallamos

$$I_1=\frac{1}{a}\,y-\frac{b}{2a}\,I_0. \tag{7.70}$$

Luego, poniendo $m=2$ en la igualdad (7.69) y empleando el valor ya calculado I_1 (es decir, la fórmula (7,70)), hallamos

$$I_2=\frac{1}{4a^2}\,(2ax-3b)\,y+\frac{1}{8a^2}\,(3b^2-4ac)\,I_0.$$

Luego continuando los razonamientos análogos, llegamos a la siguiente fórmula común:

$$I_m=P_{m-1}(x)\,y+c_mI_0, \tag{7.71}$$

donde $P_{m-1}(x)$ es polinomio de grado $m-1$, y c_m, constante. Si en la integral de tipo I $P(x)$ es polinomio de grado n, entonces la integral de tipo I será igual a la suma de las integrales I_0, I_1, . . ., I_n con ciertos multiplicadores constantes

*) Véase el § 8.

(coeficientes del polinomio $P(x)$). Por lo tanto, en virtud de la igualdad (7.71), obtenemos definitivamente la siguiente fórmula para la integral de tipo I:

$$\int \frac{P(x)}{y}\,dx = Q_{n-1}(x)\,y + C_0 \int \frac{dx}{y}. \tag{7.72}$$

En esta fórmula $Q_{n-1}(x)$ es polinomio de grado $n-1$, y C_0, constante. Para determinar el polinomio $Q_{n-1}(x)$ y la constante C_0 se emplea el *método de coeficientes indeterminados*. El polinomio $Q_{n-1}(x)$ se escribe como polinomio con coeficientes literales

$$Q_{n-1}(x) = A_0 + A_1x + \ldots + A_{n-1}x^{n-1}.$$

Diferenciando la igualdad (7.72) y multiplicando el resultado de diferenciación por y, obtenemos

$$P(x) = Q'_{n-1}(x)\,(ax^2+bx+c) + \frac{1}{2}\,Q_{n-1}(x)\,(2ax+b) + C_0. \tag{7.73}$$

En ambos miembros de la igualdad (7.73) hay polinomios de grado n. Igualando sus coeficientes, obtenemos el sistema de $n+1$ ecuaciones lineales, de las cuales se determinan $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ y C_0. La resolubilidad del sistema obtenido se desprende de la validez de la fórmula (7.72) demostrada anteriormente. Queda por agregar que la integral situada en el miembro derecho de (7.72) se reduce a la integral de tabla por el cambio lineal de la variable $t = x + \frac{b}{2a}$.

Empleando dicho cambio, la integral $\int \frac{dx}{y}$ se reduce, con exactitud de hasta factor constante, a una de las dos integrales siguientes:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2 \pm k^2}\right| + C \quad (k = \text{const} > 0)$$

ó

$$\int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}} = \arcsen\frac{t}{k} + C.$$

EJEMPLO. Calcúlese la integral

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx.$$

Para la integral considerada la fórmula (7.72) tiene la forma

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx = (A_0 + A_1x + A_2x^2)\sqrt{1+2x-x^2} + C_0 \int \frac{dx}{1+2x-x^2}. \tag{7.74}$$

Diferenciando esta fórmula y multiplicando el resultado de la diferenciación por $\sqrt{1+2x-x^2}$, obtenemos

$$x^3 = (A_1 + 2A_2x)(1 + 2x - x^2) + (A_0 + A_1x + A_2x^2)(1 - x) + C_0.$$

Igualando los coeficientes de x^3, x^2, x^1, x^0 en los miembros derecho e izquierdo, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} -3A_2 &= 1, \\ 5A_2 - 2A_1 &= 0, \\ 2A_2 + 3A_1 - A_0 &= 0, \\ A_1 + A_0 + C_0 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo este sistema, hallamos $A_2 = -1/3$, $A_1 = -5/6$, $A_0 = -19/6$, $C_0 = 4$. La integral en el miembro derecho de (7.74) se calcula haciendo la sustitución de la variable $t = x - 1$. Obtenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{2-t^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \operatorname{arcsen} \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

En definitiva, tendremos

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\, dx = \left(-\frac{19}{6} - \frac{5}{6}\, x - \frac{1}{3}\, x^2\right) \sqrt{1+2x-x^2} + \\ + 4 \operatorname{arcsen} \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

II. Pasamos a calcular la *integral de tipo* II. Mostremos que esta integral se reduce a la integral de tipo I haciendo la sustitución $t = \frac{1}{x-A}$. En efecto, puesto que

$$dx = -\frac{dt}{t^2}, \quad ax^2 + bx + c = \frac{(A^2a + Ab + c)\, t^2 + (2aA + b)\, t + a}{t^2},$$

obtenemos

$$\int \frac{B}{(x-A)^{\alpha}\, y}\, dx = -\int \frac{Bt^{\alpha-1}\, dt}{\sqrt{(A^2a + Ab + c)\, t^2 + (2aA + b)\, t + a}}.$$

III. Calculemos, por fin, la *integral de tipo* III, ante todo, *para el caso particular de* $p = 0$, $b = 0$, es decir, calculemos la integral

$$K = \int \frac{Mx + N}{(x^2+q)^{\lambda} \sqrt{ax^2+c}}\, dx.$$

Esta integral se descompone en la suma de dos integrales

$$K_1 = M \int \frac{x\, dx}{(x^2+q)^{\lambda} \sqrt{ax^2+c}} \quad \text{y} \quad K_2 = N \int \frac{dx}{(x^2+q)^{\lambda} \sqrt{ax^2+c}}.$$

La primera de estas integrales puede escribirse en la forma

$$K_1 = \frac{M}{2} \int \frac{d\,(x^2)}{(x^2+q)^{\lambda} \sqrt{ax^2+c}},$$

de la cual se desprende que la función subintegral es irracionalidad *lineal* (no cuadrática) respecto a x^2. En virtud de lo demostrado en el p. 2, la integral K_1 se racionaliza por la sustitución $t = \sqrt{ax^2+c}$. La integral K_2 puede escribirse en la forma *)

$$K_2 = N \int \frac{\frac{1}{x^{2\lambda-2}}\, \frac{dx}{x^3}}{\left(1 + q\,\frac{1}{x^2}\right)^{\lambda} \sqrt{a + c\,\frac{1}{x^2}}} = \\ = -\frac{N}{2} \int \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\lambda-1} d\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\left[1 + q\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]^{\lambda} \sqrt{a + c\,\frac{1}{x^2}}},$$

*) Consideramos que $x \neq 0$.

de la cual se desprende que la función subintegral es irracionalidad lineal respecto a $1/x^2$. Por lo tanto, la sustitución $r=\sqrt{a+\frac{c}{x^2}}$ racionaliza la integral K_ν.

Así pues, para el caso particular cuando los dos trinomios cuadráticos *no tienen términos de primer grado*, la integral de tipo III fue racionalizada.

Consideremos ahora el *caso general* de la integral de tipo III y mostramos que puede reducirse a la integral de forma particular examinada anteriormente. Si los coeficientes de los trinomios cuadráticos satisfacen la relación

$$b = ap, \tag{7.75}$$

entonces para reducir la integral de tipo III a la integral de forma particular anteriormente examinada es suficiente hacer la sustitución $x=t-\frac{p}{q}$. En efecto, obtenemos

$$\int \frac{(Mx+N)\,dx}{(x^2+px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}=$$

$$=\int \frac{Mt+\left(\frac{Mp}{2}+N\right)}{\left[t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^\lambda \sqrt{at^2+\left(c-\frac{ap^2}{4}\right)}}\,dt.$$

Es más complicado reducir la integral de tipo III a la integral de forma particular anteriormente examinada si los coeficientes de los trinomios cuadráticos *no satisfacen* la relación (7.75). En este caso, primeramente hacemos la sustitución lineal fraccional

$$x=\frac{\mu t+\nu}{1+t}, \tag{7.76}$$

escogiendo las constantes μ y ν de tal modo que los trinomios cuadráticos *no comprendan términos de primer grado respecto a* t. Mostremos que se puede escoger tales μ y ν. En efecto, al hacer la sustitución (7.76), tendremos

$$x^2+px+q=\frac{(\mu^2+p\mu+q)\,t^2+[2\mu\nu+p(\mu+\nu)+2q]\,t+(\nu^2+p\nu+q)}{(1+t)^2},$$

$$ax^2+bx+c=\frac{(a\mu^2+b\mu+c)\,t^2+[2\mu\nu a+b(\mu+\nu)+2c]\,t+(a\nu^2+b\nu+c)}{(1+t)^2}.$$

De este modo, los coeficientes μ y ν se determinan valiéndose del sistema de ecuaciones

$$2\mu\nu+p(\mu+\nu)+2q=0,\quad 2\mu\nu a+b(\mu+\nu)+2c=0$$

o del sistema de ecuaciones equivalentes

$$\mu+\nu=-\frac{2(c-aq)}{b-ap},\quad \mu\cdot\nu=\frac{cp-bq}{b-ap}.$$

Por lo tanto, μ y ν son raíces de la ecuación cuadrática

$$z^2+\frac{2(c-ap)}{b-ap}\,z+\frac{cp-bq}{b-ap}=0. \tag{7.77}$$

Queda por demostrar que la ecuación cuadrática (7.77) tiene raíces reales y diferentes. Para esto basta demostrar que el discriminante de esta ecuación es positivo, o sea, basta argumentar la desigualdad

$$(c-aq)^2>(cp-bq)(b-ap). \tag{7.78}$$

Es fácil convencerse de que la desigualdad (7.78) es equivalente a la siguiente desigualdad:

$$[2(c+aq)-bp]^2 > (4q-p^2)(4ac-b^2). \qquad (7.79)$$

Puesto que el trinomio cuadrático (x^2+px+q) tiene raíces complejas, entonces $4q-p^2>0$.

A ciencia cierta, la desigualdad (7.79) tiene lugar si $4ac-b^2\leqslant 0$. Demostremos que esta desigualdad es también válida si $4ac-b^2>0$. En este caso, $q>0$, $ac>0$ y $4\sqrt{acq}>pb$. Por eso, teniendo en cuenta que $\frac{c+aq}{2}\geqslant\sqrt{caq}$, tendremos

$$[2(c+aq)-bp]^2\geqslant[4\sqrt{qac}-pb]^2=$$
$$=(4q-p^2)(4ac-b^2)+4(p\sqrt{ac}-b\sqrt{q})^2\geqslant(4q-p^2)(4ac-b^2)$$

Esta serie de desigualdades tiene al menos un símbolo de desigualdad estricta $>$ puesto que el primer símbolo $\geqslant$ se convierte en el símbolo $=$ sólo para $c=aq$, pero, si $c=aq$, en virtud de que $b\neq ap$, a ciencia cierta $(p\sqrt{ac}-b\sqrt{q})\neq 0$, y, por eso, el segundo símbolo $\geqslant$ no se convierte en el símbolo $=$. Así pues, hemos demostrado la desigualdad (7.79), es decir, la posibilidad de escoger μ y ν tales que los trinomios cuadráticos obtenidos no comprenden términos de primer grado respecto a t. Haciendo la sustitución (7.76) con dichos μ y ν, reducimos la integral de tipo III a la forma

$$\int\frac{P(t)\,dt}{(t^2+q_1)^\lambda\sqrt{a_1t^2+c_1}}, \qquad (7.80)$$

donde a_1, c_1 y q_1 son ciertas constantes, $P(t)$ es polinomio de grado $2\lambda-1$. Al desarrollar*) la fracción $\frac{P(t)}{(t^2+q_1)^\lambda}$ en la suma de las fracciones simples, reducimos el problema de calcular la integral (7.80) al de calcular la suma de integrales en la forma

$$\int\frac{M_kt+N_k}{(t^2+q_1)^k\sqrt{a_1t^2+c_1}}\,dt \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ \lambda).$$

Cada una de estas integrales se refiere al tipo particular anteriormente examinado. Por lo tanto hemos demostrado la integrabilidad (en funciones elementales) de las integrales de todos los tres tipos I, II y III. De este modo, aparte de las sustituciones de Euler, hemos demostrado una vez más la integrabilidad de la función (7.68) en funciones elementales.

EJEMPLO. Calcúlese la integral $I=\int\frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$. Esta integral se refiere al tipo III. Ya que para ella ha sido infringida la relación (7.75), ante todo debemos hacer la sustitución (7.76). Como resultado de esta última, obtenemos

$$x^2+x+1=\frac{(\mu^2+\mu+1)t^2+[2\mu\nu+(\mu+\nu)+2]t+(\nu^2+\nu+1)}{(1+t)^2},$$
$$x^2-x+1=\frac{(\mu^2-\mu+1)t^2+[2\mu\nu-(\mu+\nu)+2]t+(\nu^2-\nu+1)}{(1+t)^2}$$

*) Cuando $\lambda>1$.

Las constantes μ y ν se hallan valiéndose del sistema de ecuaciones

$$2\mu\nu+(\mu+\nu)+2=0,\quad 2\mu\nu-(\mu+\nu)+2=0.$$

Es fácil convencerse de que *) $\mu=1$, $\nu=-1$. De este modo, la sustitución (7.76) tiene la forma $x=\dfrac{t-1}{t+1}$ de manera que

$$t=\frac{x+1}{1-x},\quad dx=\frac{2\,dt}{(1+t)^2},\quad x^2+x+1=\frac{3t^2+1}{(1+t)^2},$$

$$x^2-x+1=\frac{t^2+3}{(1+t)^2}.$$

La integral considerada toma a forma

$$I=2\int\frac{(1+t)\,dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}=I_1+I_2,$$

donde

$$I_1=2\int\frac{t\,dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}},\quad I_2=2\int\frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}.$$

Para calcular la integral I_1, hagamos la sustitución $u=\sqrt{3t^2+1}$, para la integral I_2, la sustitución $v=\sqrt{3+\dfrac{1}{t^2}}$. Como resultado, obtenemos

$$I_1=2\int\frac{du}{u^2+8}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{8}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x^2+x+1}{2(1-x)^2}}+C,$$

$$I_2=-2\int\frac{dv}{3v^2-8}=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{v+\sqrt{\frac{8}{3}}}{v-\sqrt{\frac{8}{3}}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}}+\sqrt{\frac{8}{3}}}{\sqrt{\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}}-\sqrt{\frac{8}{3}}}\right|+C.$$

§ 11. Integrales elípticas

Las integrales de irracionalidades cuadráticas lógicamente incluyen las siguientes integrales:

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}\right)dx, \tag{7.81}$$

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}\right)dx \tag{7.82}$$

cuyas funciones subintegrales comprenden la raíz cuadrada de polinomios de tercer o cuarto grado.

Estas integrales se encuentran con mucha frecuencia en aplicaciones. Notemos inmediatamente que las integrales (7.81) y (7.82), *no son, hablando en general, funciones elementales.*

---

*) Se podría tomar al contrario: $\mu=-1$, $\nu=1$.

Las dos integrales suelen llamarse *elípticas* si no se expresan mediante funciones elementales, y *seudoelípticas* si se expresan mediante funciones elementales *).

Debido a que las integrales (7.81) y (7.82) tienen importancia en aplicaciones, surge la necesidad de confeccionar tablas y gráficas de las funciones que se determinan por estas integrales. Para los coeficientes a, b, c, d y e, que son arbitrarios, es muy difícil hacer las tablas y las gráficas. Por eso surgió el problema de reducir todas las integrales de tipo (7.81) y (7.82) a ciertos tipos de integrales que comprenden el menor número posible de coeficientes arbitrarios (o como se dice reducir las integrales (7.81) y (7.82) a *la forma canónica*).

Ante todo, notemos que la integral (7.81) se reduce a la integral (7.82). En efecto, el trinomio cúbico tiene, a ciencia cierta, al menos una raíz real x_0, por lo que puede representarse en la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_0)(x^2 + px + q)$.

Haciendo la sustitución $x - x_0 = \pm t^2$, transformamos la integral (7.81) en la (7.82).

De este modo, es suficiente considerar solamente la integral (7.82).

En virtud de los resultados del § 6, el polinomio de cuarto grado puede descomponerse en el producto de dos trinomios cuadráticos con coeficientes reales

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q')$$

Siempre existe una sustitución lineal o lineal fraccional que elimina los términos lineales de ambos trinomios cuadráticos **). Haciendo la sustitución de este tipo, con exactitud de hasta el sumando que es función elemental, transformamos la integral (2.82) a la forma

$$\int \frac{R(t^2)\,dt}{\sqrt{A(1 + mt^2)(1 + m't^2)}}, \tag{7.83}$$

donde R es cierta función racional. Luego, se puede mostrar que para cualesquiera combinaciones de valores absolutos y signos de las constantes A, m y m' existe una sustitución que reduce la integral (7.83) a la llamada integral canónica

$$\int \frac{R_1(z^2)\,dz}{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}, \tag{7.84}$$

en la cual mediante k se denota una constante que satisface la condición $0 < k < 1$.

Toda integral canónica (7.84) puede reducirse a tres integrales normales siguientes con exactitud de hasta un sumando que es función elemental:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}}, \quad \int \frac{z^2\,dz}{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)},$$
$$\int \frac{dz}{(1 + hz^2)\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}} \quad (0 < k < 1). \tag{7.85}$$

Las integrales (7.85) suelen llamarse *integrales elípticas de primer, segundo y tercer género*, respectivamente. Como mostró Liouville ***), cada una de estas integrales es función *no elemental*. Las integrales elípticas de primer y segundo género comprenden solamente un parámetro k que toma valores reales del intervalo $0 < k < 1$, y, además, la integral elíptica de tercer género comprende el parámetro h que puede también tomar valores complejos.

---

*) Joseph Liouville, matemático francés (1809—1882).

**) Las denominaciones de estas integrales fueron dadas por primera vez cuando los matemáticos tropezaron con el problema de rectificar la elipse (véase el ejemplo 3 del p. 6 del § 1 del cap. 2, tomo 2).

***) Se demuestra de modo igual que en el p. 5 del § 10.

Legendre *) simplificó aun más las integrales (7.85) haciendo la sustitución $z = \text{sen}\,\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$.

Empleando esta sustitución, la primera de las integrales (7.85) se transforma en la forma

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\,\text{sen}^2\varphi}}. \qquad (7.86)$$

Con esta sustitución la segunda de las integrales (7.85) resulta ser igual, con exactitud de hasta factor constante, a la diferencia de la integral (7.86) y la siguiente integral:

$$\int \sqrt{1-k^2\,\text{sen}^2\varphi}\,d\varphi. \qquad (7.87)$$

La tercera de las integrales (7.85) se reduce a la forma

$$\int \frac{d\varphi}{(1+h\,\text{sen}^2\varphi)\sqrt{1-k^2\,\text{sen}\,\varphi}}. \qquad (7.88)$$

Las integrales (7.86), (7.87) y (7.88) suelen llamarse *integrales elípticas de primer, segundo y tercer género*, respectivamente, *en forma de Legendre*.

En las aplicaciones desempeñan un papel especialmente importante las integrales (7.86) y (7.87). Si consideremos que ambas se anulan para $\varphi = 0$, entonces, obtenemos dos funciones bien determinadas que suelen denotarse por los símbolos $F(k, \varphi)$ y $E(k, \varphi)$. Legendre y otros matemáticos examinaron sus propiedades. Para estas integrales fue establecida una serie de fórmulas y confeccionadas tablas amplias y gráficas.

A la par con las funciones elementales, las funciones E y F fueron introducidas a la familia de las funciones que se usan con frecuencia en el análisis. Aquí vale notar otra vez que el concepto de función elemental es de carácter convencional. Además, debemos, subrayar que los problemas del cálculo integral no se limitan de ninguna manera a estudiar funciones integrables en funciones elementales.

*) Adrien Marie Legendre, matemático francés (1752—1833).

Capítulo 8

TEOREMAS FUNDAMENTALES SOBRE LAS FUNCIONES CONTINUAS Y DIFERENCIABLES

Ya conocemos los conceptos de función continua y función diferenciable que fueron introducidos en los capítulos 4 y 5. En el presente capítulo establecemos una serie de propiedades importantes de funciones arbitrarias continuas y diferenciables. Para deducir estas propiedades introducimos una nueva definición del valor límite de la función y demostramos la equivalencia de esta definición a la anterior dada en el cap. 4.

§ 1. Nueva definición del valor límite de la función

1. Nueva definición del valor límite de la función. Su equivalencia a la definición anterior. Sea que, igual que en el § 2 del cap. 4, la función $y = f(x)$ está definida sobre un conjunto $\{x\}$ y sea a un punto que tal vez no pertenezca al conjunto $\{x\}$, pero posee la propiedad que en cualquier ε-entorno del punto a existen puntos del conjunto $\{x\}$.

Recordemos la *definición anterior* del valor límite de la función introducida en el cap. 4: *el número b se denomina valor límite de la función $f(x)$ en el punto $x = a$ si, para cualquier sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de valores del argumento x convergente a a cuyos elementos son diferentes de a, la sucesión correspondiente $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ de valores de la función converge a b.*

Ahora enunciemos

Nueva definición del valor límite de la función. *El número b se denomina valor límite de la función $f(x)$ en el punto $x = a$ si para cualquier número positivo ε existe un número positivo δ* *) *tal que para todos los valores del argumento x que satisfacen la desigualdad $0 < |x - a| < \delta$ es válida la desigualdad $|f(x) - b| < \varepsilon$* **).

OBSERVACIÓN 1. La limitación $0 < |x - a|$ significa que se consideran los valores del argumento x *diferentes de a*. La limitación se hace evidente si recordamos que la función examinada $f(x)$ *puede ser indefinida en el punto a*. Sin esta limitación sería imposible definir la derivada $f'(a)$ como valor límite de la función $F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ en el punto a.

---

*) Ya que δ depende de ε, a veces se escribe $\delta = \delta(\varepsilon)$.

**) La definición anterior del valor límite de la función se denomina también definición del valor límite según Heine, y la definición nueva, según Cauchy.

OBSERVACIÓN 2. Desde el punto de vista lógico, lo principal en la definición nueva es lo que *para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe un número positivo* δ *que corresponde a esta* ε y garantiza la validez de la desigualdad $|f(x) - b| < \varepsilon$ para todos los valores del argumento x que satisfacen la desigualdad $0 < |x - a| < \delta$.

OBSERVACIÓN 3. Empleando el concepto de aproximación de la función $f(x)$ en el entorno del punto $x = a$ con exactitud fijada de antemano ε, podemos formular nueva definición del valor límite

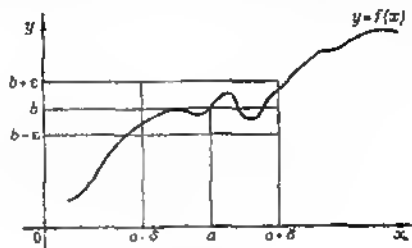


Fig. 8.1

de la función de otra manera: *el número b se denomina valor límite de la función f (x) en el punto a si para cualquier exactitud fijada de antemano ε se puede indicar un δ-entorno del punto a tal que para todos los valores del argumento x diferentes de a y pertenecientes a dicho δ-entorno, el número b aproxima el valor de la función f (x) con exactitud* ε (fig. 8.1).

Teorema 8.1. Las definiciones nueva y vieja del valor límite de la función son equivalentes.

DEMOSTRACIÓN. 1) Sea, primero, que el número b es valor límite de la función $f(x)$ en el punto a *según la definición nueva*. Demostremos que *según la definición vieja* este mismo número b es también valor límite de la función $f(x)$ en el punto a. Sea $\{x_n\}$ cualquier sucesión de valores del argumento convergente al número a todos los elementos de la cual son diferentes de a. Hay que demostrar que la sucesión correspondiente $\{f(x_n)\}$ de valores de la función converge al número b. Fijemos *cualquier* $\varepsilon > 0$. Según la nueva definición del valor límite de la función, para este ε existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - b| < \varepsilon$ para todos los valores del argumento x para los cuales $0 < |x - a| < \delta$. Ya que la sucesión $\{x_n\}$ converge al número N tal que $0 < |x_n - a| < \delta$ para $n \geqslant N$. Por lo tanto, $|f(x_n) - b| < \varepsilon$, $n \geqslant N$, lo que significa la convergencia de la sucesión $\{f(x_n)\}$ al número b.

2) Sea, ahora, que *según la definición vieja* el número b es valor límite de la función $f(x)$ en el punto a. Demostremos que *según la definición nueva* este mismo número b es también valor límite de la $f(x)$ en el punto a. Supongamos que no es así. Entonces, para cierto número positivo ε *no existe* el número positivo garantizado δ indicado en la nueva definición, es decir, para este ε y para un δ *positivo, cualquier pequeño que sea*, existe al menos un valor del argumento x tal que $0 < |x - a| < \delta$, pero $|f(x) - b| \geqslant \varepsilon$.

Conforme a lo dicho, podemos tomar la sucesión $\delta_n = 1/n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) y comprobar que para cada uno de sus elementos $\delta_n = 1/n$ existe al menos un valor del argumento x_n tal que

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}, \text{ pero } |f(x_n) - b| \geqslant \varepsilon. \tag{8.1}$$

La desigualdad izquierda de las desigualdades (8.1) significa que la sucesión $\{x_n\}$ converge al número a y se compone de elementos diferentes de a. Pero, entonces, según la vieja definición del valor límite de la función, la sucesión correspondiente $\{f(x_n)\}$ de valores de la función converge al número b, lo que contradice la desigualdad derecha de las desigualdades (8.1) válida para todos los números n. La contradicción obtenida muestra que el teorema queda demostrado.

La nueva definición del valor límite de la función permite enunciar la

Nueva definición de la continuidad de la función en el punto $x = a$ *). La función $f(x)$ *se denomina continua en el punto* $x = a$ *si para cualquier número positivo* ε *existe un número positivo* δ *tal que para todos los valores del argumento* x *que satisfacen la desigualdad* $|x - a| < \delta$ es válida la desigualdad

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{8.2}$$

OBSERVACIÓN 4. En esta definición no es necesario poner la limitación $0 < |x - a|$ puesto que para $x = a$ el miembro izquierdo de (8.2) se anula y la desigualdad (8.2) es a ciencia cierta válida.

Por analogía a lo expuesto anteriormente se enuncia la nueva definición del valor límite de la función y se demuestra su equivalencia a la vieja definición también *para el caso cuando uno o ambos números* a *y* b *se convierten en* $+\infty$ *o* $-\infty$. Limitémonos a enunciar la nueva definición del valor límite de la función para el caso cuando $a = +\infty$: *el número* b *se denomina valor límite de* $f(x)$ *para* $x \to +\infty$ *si para cualquier número positivo* ε *existe un número positivo* A *tal que para todos los valores del argumento* x *que satisfacen la desigualdad* $x > A$ *es válida la desigualdad* $|f(x) - b| < \varepsilon$.

La fig. 8.2. explica la definición dada.

*) Naturalmente, al mismo tiempo se supone que la función $y = f(x)$ está también definida en el propio punto a.

Para concluir, enunciemos la nueva definición de los valores límite derecho e izquierdo de la función $f(x)$ en el punto a: *el número b se denomina valor límite derecho (izquierdo) de la función $f(x)$ en el punto a si para cualquier número positivo ε existe un número positivo δ tal que para todos los valores del argumento x que satisfacen la desigualdad $0 < x - a < \delta$ $(0 < a - x < \delta)$ es válida la desigualdad $|f(x) - b| < \varepsilon$.*

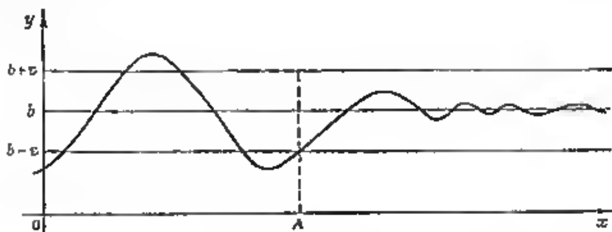


Fig. 8.2

La equivalencia de esta definición a la definición vieja del valor límite derecho (izquierdo) se demuestra de modo completamente análogo al teorema 8.1.

2. Condición necesaria y suficiente de la existencia del valor límite de la función (criterio de Cauchy). Empleando la equivalencia de las definiciones nueva y vieja del valor límite de la función, establecemos la condición necesaria y suficiente de la existencia del valor límite de la función $f(x)$ en el punto a.

Definición. *Diremos que en el punto $x = a$ la función $f(x)$ satisface la condición de Cauchy si para cualquier número positivo ε existe un número positivo δ tal que, cualesquiera que sean dos valores del argumento x' y x'' que satisfacen las desigualdades $0 < |x' - a| < \delta$ y $0 < |x'' - a| < \delta$, para los valores correspondientes de la función es válida la desigualdad*

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Teorema 8.2 (criterio de Cauchy). *Para que la función $f(x)$ tenga valor límite finito en el punto $x = a$ es necesario y suficiente que la función $f(x)$ satisfaga, en este punto, la condición de Cauchy.*

DEMOSTRACIÓN. 1) NECESIDAD. Sea que existe el valor límite finito $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Demostremos que en el punto $x = a$ la función $f(x)$ satisface la condición de Cauchy. Tomemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Según la nueva definición del valor límite de la función, para el número positivo $\varepsilon/2$ existe un número positivo δ tal que cuales-

quiera que sean los valores del argumento x' y x'' que satisfacen las desigualdades $0 < |x' - a| < \delta$ y $0 < |x'' - a| < \delta$, para los valores correspondientes de la función son válidas las desigualdades $|f(x') - b| < \varepsilon/2$ y $|f(x'') - b| < \varepsilon/2$. Ya que el módulo de la suma de dos magnitudes no supera la suma de sus módulos, entonces, de las últimas desigualdades obtenemos

$$|f(x') - f(x'')| = |[f(x') - b] - [f(x'') - b]| \leqslant \\ \leqslant |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, queda demostrado que la función $f(x)$ satisface la condición de Cauchy en el punto $x = a$.

2) SUFICIENCIA. Sea que la función $f(x)$ satisface, en el punto $x = a$, la condición de Cauchy. Demostremos que la función $f(x)$ tiene valor límite en el punto $x = a$. Sea $\{x_n\}$ cualquier sucesión de valores del argumento convergente a a, todos los elementos x_n de la cual son diferentes de a. En virtud de la vieja definición del valor límite de la función basta demostrar que la sucesión correspondiente $\{f(x_n)\}$ de valores de la función converge a un número b con tal que este número b *es igual* para todas las sucesiones $\{x_n\}$ convergentes a a tales que $x_n \neq a$.

En primer lugar demostremos la *convergencia* de toda sucesión $\{f(x_n)\}$. Sea dado un $\varepsilon > 0$ *arbitrario*. Tomemos el número positivo δ que corresponde a este ε según la condición de Cauchy y, empleando la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ hacia a, para este δ escogemos un número N tal que

$$0 < |x_n - a| < \delta \text{ para } n \geqslant N.$$

Además, para cualquier p natural ($p = 1, 2, \ldots$), con tanta más razón,

$$0 < |x_{n+p} - a| < \delta \text{ para } n \geqslant N.$$

En virtud de la condición de Cauchy, las dos últimas desigualdades llevan a la desigualdad $|f(x_{n+p}) - f(x_n)| < \varepsilon$ para $n \geqslant N$, es decir, demuestran el *carácter fundamental* de la sucesión $\{f(x_n)\}$. Conforme al criterio de Cauchy para la sucesión (es decir, conforme al teorema 3.19), la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a un número b.

Demostremos, ahora, que todas las sucesiones $\{f(x_n)\}$ correspondientes a todas las sucesiones posibles $\{x_n\}$, convergentes hacia a, *tienen un mismo límite* b.

Sean $\{x_n\}$ y $\{x'_n\}$ cualesquiera dos sucesiones de valores del argumento convergentes hacia a, todos los elementos de las cuales son diferentes de a. En virtud de lo demostrado anteriormente, ambas sucesiones $\{f(x_n)\}$ y $\{f(x'_n)\}$ convergen. Denotemos el límite de la primera de estas sucesiones por b, y el de la segunda, por b'. Demostremos que $b = b'$. Consideremos la sucesión convergente a a

$$x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots, x_n, x'_n, \ldots$$

En virtud de lo anteriormente demostrado, la sucesión correspondiente de valores de la función

$$f(x_1),\ f(x'_1),\ f(x_2),\ f(x'_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ f(x'_n),\ \ldots$$

es convergente. Pero, entonces, en virtud del p. 1 del § 4 del cap. 3, *todas las subsucesiones de esta sucesión*, incluso $\{f(x_n)\}$ y $\{f(x'_n)\}$, *convergen a un mismo límite*, es decir, $b = b'$. El teorema 8.2 queda demostrado.

De manera análoga se enuncia la condición de Cauchy y se establece la condición necesaria y suficiente de la existencia del valor límite de la función $f(x)$ cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$. Limitémonos a las formulaciones cuando $x \to +\infty$.

Diremos que la función $f(x)$ satisface la condición de Cauchy para $x \to +\infty$ si para cualquier número positivo ε existe un número positivo A tal que para cualesquiera dos valores del argumento x' y x'' superiores a A es válida la desigualdad $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

De la manera completamente análoga al teorema 8.2 se demuestra la siguiente afirmación: *para que la función $f(x)$ tenga valor límite finito cuando $x \to +\infty$, es necesario y suficiente que para $x \to +\infty$ satisfaga la condición de Cauchy.*

§ 2. El carácter acotado local de la función que tiene valor límite

En completa conformidad con la definición del conjunto de números reales superiormente (inferiormente) acotado *) introducimos el concepto de la *función superiormente (inferiormente) acotada sobre un conjunto dado.*

Definición 1. *La función $f(x)$ se denomina* ***superiormente (inferiormente) acotada*** *sobre un conjunto $\{x\}$ si existe un número real M (un número m) tal que para todos los valores del argumento x del conjunto $\{x\}$ es válida la desigualdad $f(x) \leqslant M$ ($f(x) \geqslant m$).*

En este caso el número M (el número m) se denomina cota superior (inferior) de la función $f(x)$ en el conjunto $\{x\}$.

Definición 2. *La función $f(x)$ se denomina acotada por ambos lados o simplemente acotada sobre el conjunto $\{x\}$ si está acotada sobre este conjunto, tanto superior como inferiormente, es decir, si existen números reales m y M tales que para todos los valores del argumento x del conjunto $\{x\}$ son válidas las desigualdades $m \leqslant f(x) \leqslant M$.*

De este modo, la acotación de la función $f(x)$ sobre el conjunto $\{x\}$ significa la acotación del conjunto de todos los valores de esta función.

EJEMPLOS. 1) La función $f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ no está acotada superiormente sobre el semisegmento $[0, \pi/2)$, pero está inferior-

*) Véase el p. 5 del § 1 en el cap. 2.

mente acotada (como la cota inferior se puede tomar cualquier número $m \leqslant 1$).

2) La función de Dirichlet *) está acotada por ambos lados sobre cualquier segmento $[a, b]$ (como la cota inferior se puede tomar cualquier número $m \leqslant 0$, y como la superior, cualquier número $M \geqslant 1$).

Teorema 8.3. *Si la función $f(x)$ tiene valor límite finito en el punto $x = a$, entonces existe un δ-entorno del punto a* **) *tal que para todos los valores del argumento de dicho δ-entorno la función $f(x)$ está acotada* ***).

DEMOSTRACIÓN. Sea $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. Según la nueva definición del valor límite de la función, para cierto número positivo ε existe un número positivo δ tal que $|f(x) - b| < \varepsilon$ cuando $0 \leqslant |x - a| < \delta$, o

$$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon \text{ cuando } a - \delta < x < a + \delta \text{ y } x \neq a.$$

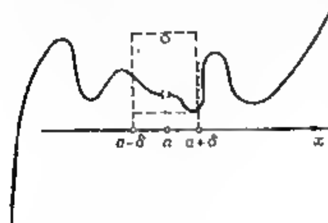


Fig. 8.3

Si el valor $x = a$ *no entra en el campo de definición de la función, el teorema queda demostrado (puesto que las desigualdades* (8.3) significan que *para todos* los valores del argumento x del δ-entorno del punto a, los valores de la función $f(x)$ se comprenden entre $b - \varepsilon$ y $b + \varepsilon$).

Si la función $f(x)$ *está también definida para* $x = a$ y en el punto a toma cierto valor $f(a)$, entonces, al designar mediante m el menor de dos números $(b - \varepsilon)$ y $f(a)$ y mediante M el mayor de dos números $(b + \varepsilon)$ y $f(a)$, se puede extraer de las desigualdades (8.3) las desigualdades siguientes:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \text{ cuando } a - \delta < x < a + \delta.$$

Las últimas desigualdades significan que la función $f(x)$ está acotada en todos los puntos del δ-entorno del punto a. El teorema queda demostrado. La fig. 8.3 puede ilustrar el teorema 8.3.

OBSERVACIÓN. La propiedad de la función que se establece por el teorema 8.3 se denomina *acotación local de la función que tiene valor límite.*

---

*) Recordemos que se denomina *función de Dirichlet* la función igual a la unidad, para todos los valores racionales del argumento, y a cero, para todos los valores irracionales del argumento

**) Recordemos que se denomina *δ-entorno del punto a* el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ donde $\delta > 0$.

***) No excluimos el caso cuando la función $y = f(x)$ está dada sobre cierto conjunto $\{x\}$ que no llena completamente ningún δ-entorno del punto a.

Corolario del teorema 8.3. *Si la función $f(x)$ es continua en el punto $x = a$, entonces esta función está acotada para todos los valores del argumento de cierto σ-entorno del punto a.* (La función continua en en el punto $x = a$ tiene valor límite finito en este punto).

§ 3. Teorema sobre la estabilidad del signo de una función continua

Teorema 8.4. *Si la función $f(x)$ es continua en el punto $x = a$ y si $f(a) \neq 0$ entonces existe un δ-entorno del punto a tal que para todos los valores del argumento de dicho δ-entorno la función $f(x)$ no se anula y tiene el signo coincidente con el signo de $f(a)$.*

DEMOSTRACIÓN. Ya que la función es continua en el punto a, entonces existe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ con tal que $b = f(a) \neq 0$. Según la nueva definición del valor límite de la función, para *cualquier* $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon \text{ cuando*)}$$
$$a - \delta < x < a + \delta. \quad (8.4)$$

Como tomemos un número positivo que satisface la exigencia $\varepsilon < |b|$. Al elegir ε de este modo, tenemos que $b - \varepsilon$, $b + \varepsilon$ y b son de *un mismo signo*. Por lo tanto, conforme a (8.4), en todos los puntos del δ-entorno del punto a, la función $f(x)$ conserva el signo del número $b = f(a)$. El teorema queda demostrado. La fig. 8.4 puede ilustrar el teorema 8.4.

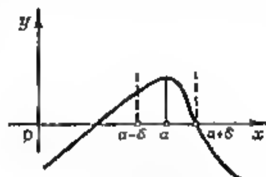


Fig. 8.4

OBSERVACIÓN PARA EL TEOREMA 8.4. El teorema 8.4 puede transferirse para el caso de la función $f(x)$ continua en el punto dado $x = a$ *por la derecha* (*izquierda*). Sea δ un número positivo. Pongámonos de acuerdo llamar *semientorno derecho del punto $x = a$* el semisegmento $[a, a + \delta)$ y *semientorno izquierdo del punto $x = a$* el semisegmento $(a - \delta, a]$. Tiene lugar la afirmación siguiente: *si la función $f(x)$ es continua en el punto $x = a$ por la derecha (por la izquierda) y si $f(a) \neq 0$, entonces existe un semientorno derecho (izquierdo) del punto $x = a$ tal que para todos los valores del argumento de dicho semientorno la función $f(x)$ no se anula y tiene el signo coincidente con el signo de $f(a)$.*

La demostración de esta afirmación repite casi literalmente la demostración del teorema 8.4 con tal que en vez de las desigualdades derechas de (8.4) obtenemos las desigualdades $a \leqslant x < a + \delta$ ($a - \delta < x \leqslant a$).

*) Al mismo tiempo, no es necesario excluir el valor $x = a$ puesto que para la función continua $f(x)$ el valor $f(a) = b$ también satisface las desigualdades izquierdas de (8.4)

§ 4. Paso de una función continua por cualquier valor intermedio

1. Paso de una función continua por el cero cuando el signo cambia.

Teorema 8.5. *Sea la función $f(x)$ continua sobre el segmento $[a, b]$ y sea que en los extremos del segmento los valores de esta función $f(a)$ y $f(b)$ son números de signos diferentes. Entonces, dentro del segmento $[a, b]$ existe un punto ξ, en el cual el valor de la función es igual a cero.*

DEMOSTRACIÓN. Para la precisión, supongamos que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Consideremos el conjunto $\{x\}$ *de todos los valores x del segmento $[a, b]$ para los cuales $f(x) < 0$.* Este conjunto tiene al menos un elemento $x = a$ (puesto que $f(a) < 0$) y está *superiormente acotado* (por ejemplo, por el valor $x = b$). Según el teorema 2.1, el conjunto $\{x\}$ tiene cota superior exacta que se denota mediante ξ.

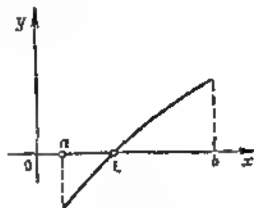


Fig. 8.5

Ante todo, observemos que el punto ξ es punto *interior* del segmento $[a, b]$ puesto que de la continuidad de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ y de las condiciones $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, en virtud de la observación para el teorema 8.4, se desprende que existe un semientorno derecho del punto $x = a$ que comprende $f(x) < 0$ y un semientorno izquierdo del punto $x = b$ que comprende $f(x) > 0$. Demostremos ahora que $f(\xi) = 0$. Si no fuera así, entonces, por el teorema 8.4, existiría un δ-entorno $\xi - \delta < x < \xi + \delta$ del punto ξ *entre los límites de la cual la función $f(x)$ tendría un signo determinado.* Pero esto es imposible puesto que, según la definición de la cota superior exacta, existe al menos un valor x del semisegmento $\xi - \delta < x \leqslant \xi$ tal que $f(x) < 0$, y para todo valor x del intervalo $\xi < x < \xi + \delta$, $f(x) \geqslant 0$. Pues, $f(\xi) = 0$. El teorema queda demostrado. La fig. 8.5 puede ilustrar el teorema 8.5.

2. Paso de una función continua por cualquier valor intermedio.

Teorema 8.6. *Sea la función $f(x)$ continua sobre el segmento $[a, b]$ con tal que $f(a) = A$, $f(b) = B$. Sea, luego, C cualquier número comprendido entre A y B. Entonces, en el segmento $[a, b]$ existe un punto ξ tal que $f(\xi) = C$.*

DEMOSTRACIÓN. Debemos considerar solamente el caso cuando $A \neq B$ y C no coincide con ninguno de los números A y B. Sea, para la precisión, $A < B$ y $A < C < B$. Consideremos la función $\varphi(x) = f(x) - C$. Esta función es continua en el segmento $[a, b]$ (como la

diferencia de las funciones continuas) y en los extremos de este segmento toma valores de signos diferentes

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0, \quad \varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0$$

Según el teorema 8.5, dentro del segmento $[a, b]$ existe un punto ξ tal que $\varphi(\xi) = f(\xi) - C = 0$. Por lo tanto, $f(\xi) = C$. El teorema queda demostrado.

§ 5. El carácter acotado de la función, continua en un segmento

Teorema 8.7 (***primer teorema de Weierstrass***). *Si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ entonces está acotada sobre este segmento.*

DEMOSTRACIÓN. Demostremos que la función $f(x)$ está superiormente acotada en el segmento $[a, b]$ (la acotación inferior se demuestra de modo completamente análogo).

Supongamos lo contrario, es decir, admitamos que la $f(x)$ no es acotada superiormente en el segmento $[a, b]$.

Entonces, para *cualquier* número natural n ($n = 1, 2, \ldots$) existe al menos un punto x_n del segmento $[a, b]$ tal que $f(x_n) > n$ (de otro modo, $f(x)$ sería superiormente acotada en el segmento $[a, b]$).

De este modo, existe una sucesión de valores x_n del segmento $[a, b]$ tal que la sucesión correspondiente de valores de la función $\{f(x_n)\}$ es infinita. En virtud del teorema de Bolzano — Weierstrass (véase el teorema 3.17 del p. 4 del § 4 del cap. 3), de la sucesión $\{x_n\}$ se puede separar una subsucesión convergente al punto ξ que, conforme a la observación 2 de dicho teorema, pertenece al segmento $[a, b]$. Denotemos esta subsucesión mediante el símbolo $\{x_{k_n}\}$ ($n = 1, 2, \ldots$). En virtud de la continuidad de la función $f(x)$ en el punto ξ la subsucesión correspondiente de valores de la función $\{f(x_{k_n})\}$ debe obligatoriamente convergir a $f(\xi)$. Pero esto es imposible puesto que, siendo separada de la sucesión infinita $\{f(x_n)\}$, la subsucesión $\{f(x_{k_n})\}$, la misma es infinita (véase el p. 1 del § 4 del cap 3). La contradicción obtenida muestra que el teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. Para el intervalo (o el semisegmento), la afirmación análoga al teorema 8.7 ya no es válida, puesto que de la continuidad de la función en el intervalo (o en el semisegmento) ya no se desprende la acotación de esta función en dicho conjunto. Por ejemplo, consideremos la funcion $f(x) = 1/x$ sobre el intervalo $(0, 1)$ (o sobre el semisegmento $(0, 1]$). Esta función es continua sobre dicho intervalo (o semisegmento), pero no está acotada sobre él, puesto que existe una sucesión de puntos $x_n = 1/n$ ($n = 2, 3, \ldots$) pertenecientes a dicho intervalo (o semisegmento) tal que la sucesión correspondiente de valores de la función $\{f(x_n)\} = \{n\}$ es infinita.

§ 6. Cotas exactas de una función y cómo las alcanza una función, continua en un segmento

1. Concepto de cotas exactas superior e inferior de una función sobre un conjunto dado. Consideremos una función $f(x)$ superiormente (inferiormente) acotada sobre un conjunto dado $\{x\}$ *). Empleando, para el conjunto de todos los valores de esta función, el concepto de cota superior exacta (inferior exacta) introducido en el p. 5 del § 1 del cap. 2, llegamos a la siguiente definición. *El número M (el número m) se denomina* ***cota superior exacta (inferior exacta) de la función $f(x)$*** *sobre el conjunto $\{x\}$ si se cumplen dos exigencias siguientes:* 1) *para todo valor x del conjunto $\{x\}$ es válida la desigualdad $f(x) \leqslant M$ $(f(x) \geqslant m)$,* 2) *cualquiera que sea un número positivo ε, existe al menos un valor x del conjunto $\{x\}$ para el cual es válida la desigualdad*

$$f(x) > M - \varepsilon \; f(x) < m + \varepsilon.$$

En esta definición la exigencia 1) comprueba que el número M (el número m) es una de las cotas superiores (inferiores) de la función $f(x)$ sobre el conjunto $\{x\}$, y la exigencia 2) dice que esta cota es *la mínima* (*la máxima*) y no puede disminuirse (aumentarse). Para designar las cotas superior exacta e inferior exacta de la función $f(x)$ sobre el conjunto $\{x\}$ se usan los siguientes símbolos:

$$M = \sup_{\{x\}} \{f(x)\}, \quad m = \inf_{\{x\}} \{f(x)\}.$$

Del teorema 2.1 demostrado en el p. 5 del § 1 del cap. 2 se desprende directamente la siguiente afirmación: *si la función $f(x)$ está superiormente (inferiormente) acotada sobre el conjunto $\{x\}$, entonces, en este conjunto la función $f(x)$ tiene cota superior exacta (inferior exacta).*

Lógicamente, surge la pregunta de *si es alcanzable la cota superior exacta (inferior exacta) de la función*, es decir, si entre los puntos del conjunto $\{x\}$ existe un punto x tal que el valor de la función en este punto es igual a la cota. El siguiente ejemplo muestra que, *hablando en general*, las cotas superior exacta e inferior exacta *no son alcanzables.*

Consideremos en el segmento $[0, \pi/2]$ la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & \text{si} \quad 0 < x < \pi/2, \\ 1/2, & \text{si} \; x = 0 \;\text{y}\; x = \pi/2. \end{cases}$$

Esta función está acotada en el segmento $[0, \pi/2]$, tanto superior como inferiormente, y tiene en este segmento la cota superior exacta $M = 1$ y la cota inferior exacta $m = 0$. Sin embargo, en ningún punto del segmento $[0, \pi/2]$ la función toma valores iguales a estas

*) La definición de la función superiormente (inferiormente) acotada sobre un conjunto prefijado se da al comenzar el § 2 del presente capítulo.

cotas (fig. 8.6). De este modo, la función considerada no tiene valores máximo ni mínimo en el segmento $[0, \pi/2)$.

Fijemos la atención en que la función considerada no es continua en el segmento $[0, \pi/2]$. Este hecho no es casual, puesto que, como lo demostraremos en el siguiente punto, la función, continua en un segmento, alcanza obligatoriamente sus cotas superiores e inferiores exactas en algunos puntos de este segmento.

2. Cómo una función, continua en un segmento, alcanza sus cotas exactas. Sea la función $f(x)$ continua en un segmento $[a, b]$. Entonces, en virtud del teorema 8.7, esta función es acotada, en este segmento, tanto superior como inferiormente. Por lo tanto, conforme a la afirmación enunciada en el punto anterior, en el segmento $[a, b]$ esta función tiene la cota superior exacta M y la cota inferior exacta m. Demostremos que estas cotas son alcanzables.

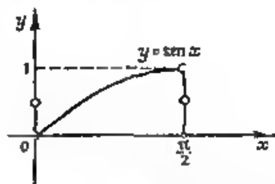


Fig. 8.6

Teorema 8.8 (segundo teorema de Weierstrass). *Si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ alcanza sus cotas superior e inferior exactas en este segmento* (es decir, en el segmento $[a, b]$ existen puntos x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$).

DEMOSTRACIÓN. Demostremos que en el segmento $[a, b]$ la función $f(x)$ alcanza su cota superior exacta M (para la cota inferior exacta la demostración es análoga).

Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que en ningún punto del segmento $[a, b]$ la función $f(x)$ toma valor igual a M. Entonces, *para todos* los puntos del segmento $[a, b]$ es válida la desigualdad $f(x) < M$ y en el segmento $[a, b]$ podemos considerar la función siempre positiva

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Ya que el denominador $M - f(x)$ no se anula y es continuo en el segmento $[a, b]$, entonces, según el teorema 4.2, la función $F(x)$ es también continua en el segmento $[a, b]$. En este caso, de acuerdo con el teorema 8.7., la función $F(x)$ está acotada en el $[a, b]$, o sea, existe un número positivo B tal que para todos los x del segmento $[a, b]$

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leqslant B.$$

La última desigualdad (teniendo en cuenta que $M - f(x) > 0$) puede escribirse en la forma

$$f(x) \leqslant M - \frac{1}{B}.$$

Dicha relación, válida *para todos* los puntos x del segmento $[a, b]$ contradice el hecho de que el número M es cota superior exacta (*la mínima entre todas las cotas superiores*) de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$. La contradicción obtenida muestra que el teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN 1. La afirmación análoga al teorema 8.8 no tiene lugar para el intervalo y el semisegmento. En efecto, en la observación del teorema 8.7 (véase el § 5) hemos dado el ejemplo de la función continua sobre el intervalo (semisegmento) y no acotada en éste (la cota superior (o inferior) exacta de esta función no sólo puede ser alcanzada sino no existe).

OBSERVACIÓN 2. Después de demostrar que la función, continua en un segmento, alcanza sus cotas superior e inferior exactas en este segmento, podemos llamar *valor máximo* a la cota superior exacta y *valor mínimo* de la función $f(x)$ en este segmento a la cota inferior exacta y enunciar el teorema 8.8 de otra forma: *la función, continua en un segmento, tiene en este segmento valores máximo y mínimo* *).

OBSERVACIÓN 3. Entre otras propiedades de la función, continua en un segmento, hay la propiedad llamada *continuidad uniforme*. La examinaremos en el § 4 del cap. 1 del tomo 2. Aquí solamente notemos que los pp. 1 y 2 del § 4 del cap. 1 del tomo 2 pueden leerse después del párrafo presente.

§ 7. Crecimiento (decrecimiento) de la función en un punto. Máximo (mínimo) local

1. Crecimiento (decrecimiento) de la función en un punto. Supongamos que la funcion $f(x)$ está definida siempre en un entorno del punto c.

Definición. *Se dice que la función* $f(x)$ ***crece (decrece) en el punto*** c *si existe un entorno del punto* c*, entre los límites del cual* $f(x) > f(c)$ *para* $x > c$ *y* $f(x) < f(c)$ *para* $x < c$ ($f(x) < f(c)$ *para* $x > c$ *y* $f(x) > f(c)$ *para* $x < c$).

En la fig. 8.7 está representada la función creciente en el punto c y decreciente en el punto d.

Establecemos *la condición suficiente del crecimiento* (decrecimiento) de la función $f(x)$ en el punto c.

---

*) Notemos que las funciones, discontinuas en un segmento, pueden tener también valores máximo y mínimo en este segmento. Así, por ejemplo, la función de Dirichlet, ya conocida del § 1. del cap. 4,

$$y = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional}, \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

es discontinua en todo punto de cualquier segmento $[a, b]$, pero en este segmento tiene el valor máximo igual a la unidad y el valor mínimo igual a cero.

Teorema 8.9. Si la función $f(x)$ es diferenciable en el punto c y $f'(c) > 0$ ($f'(c) < 0$), entonces esta función crece (decrece) en el punto c.

DEMOSTRACION. Demostremos el teorema para el caso de $f'(c) > 0$ (el caso de $f'(c) < 0$ se considera de modo completamente análogo). Ya que

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

entonces, según nueva definición del valor límite de la funcióo, *para cualquier* $\varepsilon > 0$ existe un δ positivo tal que

$$f'(c) - \varepsilon < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < f'(c) + \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < |x - c| < \delta. \qquad (8.5)$$

Como ε tomemos un número positivo menor que $f'(c)$. Entonces, $f'(c) - \varepsilon > 0$ y, por lo tanto, de (8.5) obtenemos

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0, \quad \text{si } 0 < |x - c| < \delta. \qquad (8.6)$$

La expresión (8.6) significa que *en todos los puntos del δ-entorno del punto c $f(x) > f(c)$ si $x > c$ y $f(x) < f(c)$ si $x < c$.* El crecimiento de la función $f(x)$ en el punto c queda demostrado.

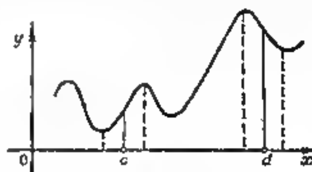


Fig. 8.7

OBSERVACION. Subrayemos que *la positividad (la negatividad) de la derivada $f'(c)$ no es condición necesaria del crecimiento (decrecimiento) de la función $f(x)$ en el punto c.* A título de ejemplo, indiquemos la función $f(x) = x^3$ que crece en el punto $x = 0$ y, sin embargo, tiene en este punto la derivada $f'(0) = 0$ (la gráfica de esta función se representa en la fig. 8.8).

2. Máximo local y mínimo local de la función. Sea, de nuevo, que la función $f(x)$ está siempre definida en un entorno del punto c.

Definición. *Se dice que la función $f(x)$ tiene en el punto c* ***máximo (mínimo) local*** *si existe un entorno del punto c entre los límites del cual el valor $f(c)$ es el máximo (mínimo) de todos los valores de esta función.*

En la fig. 8.9 está representada una función que tiene máximo local en el punto c.

El máximo local y el mínimo local se denominan comúnmente *extremo local.*

Establecemos la *condición necesaria de extrema* de la función diferenciable.

Teorema 8.10. *Si la función $f(x)$ es diferenciable en el punto c y tiene extremo local en este punto, entonces $f'(c) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Ya que la función $f(x)$ tiene extremo local en el punto c, entonces en este punto $f(x)$ no puede crecer ni decrecer. Por lo tanto, en virtud del teorema 8.9, la derivada $f'(c)$ no puede ser positiva ni negativa, es decir, $f'(c) = 0$.

El teorema 8.10 tiene sentido geométrico sencillo: comprueba que si en el punto de la curva $y = f(x)$ a que corresponde el extremo local de la función $f(x)$ existe la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$, entonces esta tangente es paralela al eje Ox (véase la fig. 8.9).

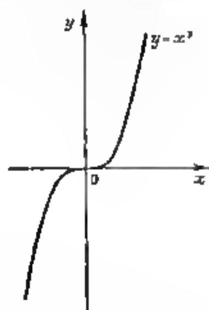


Fig. 8.8

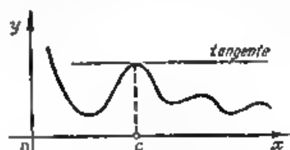


Fig. 8.9

§ 8. Teorema sobre el cero de la derivada

Teorema 8.11 (*teorema de Rolle* *). *Sea que la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ y diferenciable en todos los puntos interiores de este segmento. Además, sea que $f(a) = f(b)$. Entonces dentro del segmento $[a, b]$ existe un punto ξ tal que el valor de la derivada en este punto $f'(\xi)$ es igual a cero.*

Se puede decir en breve que entre dos valores iguales de una función diferenciable tiene que estar el cero de la derivada de esta función.

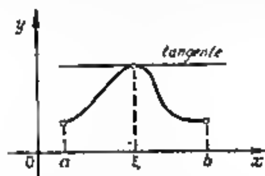


Fig. 8.10

DEMOSTRACIÓN. Ya que la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$, entonces, según el teorema 8.8 esta función *alcanza* su valor máximo M y su valor mínimo m en este segmento. Pueden tenerse dos casos: 1) $M = m$, 2) $M > m$. En el caso 1) $f(x) = M =$

*) Michel Rolle, matemático francés (1652—1719).

$= m =$ const. Por eso, la derivada $f'(x)$ *es igual a cero en cualquier punto del segmento* $[a, b]$. En el caso de $M > m$, debido a que $f(a) = f(b)$, se puede afirmar que la función alcanza *al menos uno* de los valores M o m en un punto *interior* ξ del segmento $[a, b]$. Pero entonces, en este punto ξ la función $f(x)$ tiene extremo local. Ya que la función $f(x)$ es diferenciable en el punto ξ, entonces, según el teorema 8.10, $f'(\xi) = 0$. El teorema queda completamente demostrado.

El teorema de Rolle tiene sentido geométrico sencillo: si las ordenadas extremas de la curva $y = f(x)$ son iguales, entonces, según el teorema de Rolle, en la curva $y = f(x)$ existe un punto en el cual la tangente a la curva es paralela al eje Ox (fig. 8.10).

Como veremos en adelante, muchas fórmulas y teoremas del análisis matemático se basan en el teorema de Rolle.

§ 9. Fórmula de los incrementos finitos (fórmula de Lagrange)

El siguiente teorema perteneciente a Lagrange *) tiene gran importancia en el análisis y sus aplicaciones.

Teorema 8.12 (***teorema de Lagrange***). *Si la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y diferenciable en todos los puntos interiores de este segmento, entonces, dentro del segmento $[a, b]$ existe un punto ξ tal que es válida la fórmula*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \tag{8.7}$$

La fórmula (8.7) se denomina *fórmula de Lagrange o fórmula de los incrementos finitos.*

DEMOSTRACIÓN. En el segmento $[a, b]$ consideremos la siguiente función auxiliar:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{8.8}$$

Verifiquemos que para la función $F(x)$ se cumplen todas las condiciones del teorema de Rolle. En efecto, $F(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ (como la diferencia de la función $f(x)$ y la función lineal) y en todos los puntos interiores del segmento $[a, b]$ tiene la derivada igual a

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Valiéndose de la formula (8.8) es obvio que $F(a) = F(b) = 0$.

*) Joseph Louis Lagrange, gran matemático y mecánico francés (1763—1813).

Según el teorema de Rolle, dentro del segmento $[a, b]$ existe un punto ξ tal que

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0. \tag{8.9}$$

De la igualdad (8.9) se desprende la fórmula de Lagrange (8.7). Subrayemos que no es necesario tomar $b > a$ en la fórmula (8.7).

OBSERVACIÓN. Hemos obtenido el teorema de Lagrange como el corolario del teorema de Rolle. Además, observemos que el propio teorema de Rolle es caso particular del teorema de Lagrange (para $f(a) = f(b)$).

Para aclarar el sentido geométrico del teorema de Lagrange, observemos que la magnitud $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es el coeficiente angular de la secante que pasa a través de los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ de la curva $y = f(x)$, y $f'((\xi)$ es el coeficiente angular de la tangente a la curva $y = f(x)$ que pasa por el punto $C(\xi, f(\xi))$. La fórmula de Lagrange (8.7) significa que en la curva $y = f(x)$ entre los puntos A y B existe un punto C tal que la tangente en este punto es paralela a la secante AB (fig. 8.11).

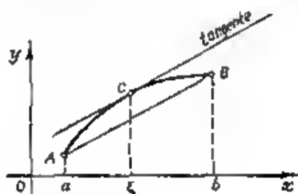


Fig. 8.11

Frecuentemente es conveniente escribir la fórmula de Lagrange en forma un poco diferente de (8.7). Sea que $f(x)$ satisface las condiciones del teorema 8.11. Fijemos cualquier x_0 del segmento $[a, b]$ y le demos un incremento arbitrario Δx, pero tal que el valor $(x_0 + \Delta x)$ también esté en el segmento $[a, b]$. Entonces, escribiendo la fórmula de Lagrange para el segmento $[x_0, x_0 + \Delta x]$, tendremos

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x f'(\xi), \tag{8.10}$$

donde ξ es un punto situado entre x_0 y $x_0 + \Delta x$. Se puede afirmar que *existe un número* θ (*dependiente de* Δx) *del intervalo* $0 < \theta < 1$ tal que $\xi = x_0 + \theta\Delta x$. De este modo, la fórmula (8.10) puede tomar la forma

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) = \Delta x f'(x_0 + \theta\Delta x), \tag{8.11}$$

donde θ es un número del intervalo $0 < \theta < 1$. La fórmula de Lagrange en la forma (8.11) de la expresión exacta para el incremento de la función utilizando un incremento finito arbitrario Δx del argumento que provoca este incremento de la función. Esta forma de la fórmula de Lagrange justifica el término «fórmula de los incrementos finitos».

§ 10. Algunos corolarios de la fórmula de Lagrange

1. Constancia de la función que en un intervalo tiene derivada igual a cero.

Teorema 8.13. *Si la función $f(x)$ es diferenciable en el intervalo (a, b) y si en todos los puntos de este intervalo $f'(x) = 0$, entonces la función $f(x)$ es constante en el intervalo (a, b).*

DEMOSTRACIÓN. Sea x_0 un punto *fijado* del intervalo (a, b), y x, cualquier punto de este intervalo.

El segmento $[x_0, x]$ pertenece por entero al intervalo (a, b). Por eso, la función $f(x)$ es diferenciable (y, por tanto, continua) en todos los puntos del segmento $[x_0, x]$. Esto permite aplicar el teorema de Lagrange, a la función $f(x)$ en el segmento $[x_0, x]$. Según este teorema, dentro del segmento $[x_0, x]$ existe un punto ξ tal que

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(\xi). \tag{8.12}$$

Por condición, la derivada de la función $f(x)$ es igual a cero en todos los puntos del intervalo (a, b). Por lo tanto, $f'(\xi) = 0$ y de la fórmula (8.12) obtenemos

$$f(x) = f(x_0). \tag{8.13}$$

La igualdad (8.13) comprueba que el valor de la función $f(x)$ en *cualquier* punto x del intervalo (a, b) es igual a su valor en el punto *fijado* x_0. Esto significa que la función $f(x)$ es *constante sobre todo el intervalo* (a, b). El teorema queda demostrado.

El teorema 8.13 tiene sentido geométrico sencillo: si en todo punto de un segmento de la curva $y = f(x)$ la tangente es paralela al eje Ox, entonces, dicho segmento de la curva $y = f(x)$ es segmento de la recta paralela al eje Ox.

OBSERVACIÓN. En el cap. 6 ya hemos empleado el teorema 8.13 para demostrar el teorema 6.1. Aquí volvemos a notar que en el presente capítulo (incluso en el teorema 8.13) no se utilizan completamente los resultados de los capítulos 6 y 7. Al leer este libro por segunda vez, se puede estudiar el cap. 8 inmediatamente después del cap. 5 y sólo después leer los capítulos 6 y 7.

2. Condiciones de monotonía de la función en un intervalo. Como el segundo corolario de la fórmula de Lagrange consideremos el problema de las condiciones que aseguran el no decrecimiento (no crecimiento) de la función en dicho intervalo.

Ante todo, recordemos las definiciones del no decrecimiento, no crecimiento, crecimiento y decrecimiento de la función en un intervalo dado.

1°. Se dice que la función $f(x)$ *no decrece* (*no crece*) *en el intervalo* (a, b) si para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 del intervalo (a, b)

que satisfacen la condición $x_1 < x_2$ es válida la desigualdad

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (f(x_1) \geqslant f(x_2)).$$

2°. Se dice que la función $f(x)$ *crece* (*decrece*) *en el intervalo* (a, b) si para cualesquiera puntos x_1 y x_2 del intervalo (a, b) relacionados por la condición $x_1 < x_2$ es válida la desigualdad

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (f(x_1) \geqslant f(x_2)).$$

Teorema 8.14. *Para que la función $f(x)$, diferenciable en el intervalo (a, b), no decrezca (no crezca) en este intervalo, es necesario y suficiente que la derivada de esta función sea no negativa (no positiva) en todos los puntos de este intervalo.*

DEMOSTRACIÓN. 1) SUFICIENCIA. Sea $f'(x) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) en todos los puntos del intervalo (a, b). Hay que demostrar que $f(x)$ no decrece (no crece) en el intervalo (a, b). Sean x_1 y x_2 cualesquiera dos puntos del intervalo (a, b) que satisfacen la condición $x_1 < x_2$. La función $(f(x)$ es diferenciable (y por tanto, continua) en todos los puntos del segmento $[x_1, x_2]$. Por eso, en el segmento $[x_1, x_2]$ a $f(x)$ se puede aplicar el teorema de Lagrange. Como resultado, obtenemos

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi), \tag{8.14}$$

donde $x_1 < \xi < x_2$.

Por condición, $f'(\xi) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$), $x_2 - x_1 > 0$. Por eso, el miembro derecho de (8.14) es no negativo (no positivo), lo que demuestra el no decrecimiento (no crecimiento) de $f(x)$ en el intervalo (a, b).

2) NECESIDAD. Sea la función $f(x)$ diferenciable en el intervalo (a, b) y sea que no decrece (no crece) en este intervalo. Hay que demostrar que $f'(x) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) en todo el intervalo. Ya que $f(x)$ no decrece (no crece) en el intervalo (a, b), entonces esta función no puede decrecer (crecer) en ningún punto del intervalo (a, b). Por tanto, en virtud del teorema 8.9, en ningún punto del intervalo (a, b) la derivada de $f'(x)$ puede ser negativa (positiva), lo que era necesario demostrar.

Teorema 8.15. *Para que la función $f(x)$ crezca (decrezca) en el intervalo (a, b) es suficiente que la derivada $f'(x)$ sea positiva (negativa) en todos los puntos de este intervalo.*

Demostramos valiéndose del mismo procedimiento que utilizamos para demostrar la suficiencia en el teorema 8.14. Sean x_1 y x_2 cualesquiera dos puntos del intervalo (a, b) que satisfacen la condición $x_1 < x_2$. Escribiendo para el segmento $[x_1, x_2]$ la fórmula de Lagrange, obtenemos la igualdad (8.14), pero esta vez, en la igualdad $f'(\xi) > 0$ (< 0).

Por consiguiente, el miembro izquierdo de (8.14) es positivo (negativo) lo que demuestra el crecimiento (decrecimiento) de $f(x)$ en el intervalo (a, b).

OBSERVACIÓN. Subrayemos que la positividad (negatividad) de la derivada $f'(x)$ en el intervalo (a, b) *no es condición necesaria* del crecimiento (decrecimiento) de la función $f(x)$ en el intervalo (a, b). Así, la función $y = x^3$ crece en el intervalo $(-1, +1)$, pero la derivada de esta función $f'(x) = 3x^2$ no es siempre positiva en este intervalo (se anula en el punto $x = 0$). En general, es fácil demostrar que la función $f(x)$ crece (decrece) en el intervalo (a, b) si la derivada de esta función $f'(x)$ es siempre positiva (negativa) en este intervalo *excepto un número finito de puntos*, en los cuales la derivada es igual a cero. (Para demostrarlo es suficiente aplicar el teorema 8.15 a cada uno del número finito de intervalos en los cuales $f'(x)$ es estrictamente positiva (negativa) y tomar en consideración la continuidad de $f(x)$ en los puntos donde la derivada es igual a cero. Valiéndose de los razonamientos geométricos es fácil comprender la relación establecida por el teorema 8.15 entre el signo de la derivada y la dirección de variación de la función. Ya que la derivada es igual al coeficiente angular de la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$, el signo de la derivada indica qué ángulo, agudo u obtuso, forma el rayo de la tangente situado en el semiplano superior con la dirección positiva del eje Ox. Si $f'(x) > 0$ en todo el intervalo (a, b), entonces, en todo este intervalo el rayo de la tangente situado en el semiplano superior forma un ángulo agudo con Ox. Por lo tanto, la curva $y = f(x)$ va hacia arriba en todo este intervalo (fig. 8.12).

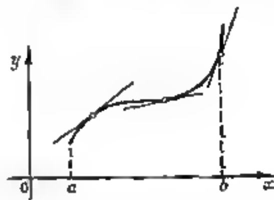


Fig. 8.12

3. **Carencia de puntos de discontinuidad de primera especie y de discontinuidad evitable en la derivada.** Apliquemos el teorema de Lagrange para aclarar una propiedad notable de la derivada. Ante todo, demostremos la siguiente afirmación. *Sea que la función $f(x)$ tiene derivada finita en todos los puntos del semientorno derecho (izquierdo) del punto c y la derivada derecha (izquierda) en el propio punto c. Entonces, si en el punto c la derivada $f'(x)$ tiene valor límite derecho (izquierdo), este valor límite es igual a la derivada derecha (izquierda) en el punto c.*

Para demostrar esta afirmación, consideremos cualquier sucesión $\{x_n\}$ de valores del argumento convergente a c por la derecha (por la izquierda). Teniendo en cuenta que, a partir de un número n bastante grande, todos los x_n pertenecen al semientorno, en el que la función $f(x)$ tiene la primera derivada finita, apliquemos el teore-

ma de Lagrange a la función $f(x)$ por el segmento* $[c, x_n]$ ($[x_n, c]$). En este caso obtenemos

$$\frac{f(x_n)-f(c)}{x_n-c}=f'(\xi_n), \tag{8.15}$$

donde mediante ξ_n se denota un punto situado entre c y x_n. Sea, ahora, que en la igualdad (8.15) $n\to\infty$. Entonces, es obvio que $\xi_n\to c$ por la derecha (por la izquierda). Ya que según la condición, $f'(x)$ tiene en el punto c valor límite derecho (izquierdo) finito, entonces, por la definición del valor límite, el miembro derecho de (8.15) tiene que tender a dicho valor límite cuando $n\to\infty$. Por lo tanto, para $n\to\infty$ existe también el límite del miembro izquierdo de (8.15). Por la definición de la derivada derecha (izquierda), este límite es igual a $f'(c+0)$ ($f'(c-0)$). Pues, pasando al límite para $n\to\infty$, de la igualdad (8.15) obtenemos

$$f'(c+0)=\lim_{x\to c+0} f'(x), \quad \left(f'(c-0)=\lim_{x\to c-0} f'(x)\right).$$

Si exigimos complementariamente que se cumple la igualdad $f'(c+0)=f'(c-0)$, entonces de la existencia de los límites $\lim\limits_{x\to c+0} f'(x)$ y $\lim\limits_{x\to c-0} f'(x)$ se desprenderá la continuidad de $f'(x)$ en el punto c.

Aplicando la afirmación que acabamos de demostrar, en todo punto c de cierto intervalo (a, b), llegamos a la siguiente afirmación: *si la función $f(x)$ tiene derivada finita en todos los puntos del intervalo (a, b), entonces $f'(x)$ no puede tener en este intervalo puntos de discontinuidad evitable ni puntos de discontinuidad de primera especie.*

En efecto, si en un punto c del intervalo (a, b) existen valores límite derecho e izquierdo finitos de $f'(x)$, entonces *$f'(x)$ es continua en el punto c* (en virtud de la afirmación anteriormente demostrada). Si al menos uno de dos valores límite indicados no existe, *$f'(x)$ tiene discontinuidad de segunda especie en el punto c*. Demos el ejemplo de la función cuya derivada existe y es finita en todos los puntos de cierto intervalo y tiene en un punto de este intervalo discontinuidad de segunda especie. En el intervalo $(-1, +1)$ consideremos la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}, & \text{si } x\neq 0, \\ 0, & \text{si } x=0. \end{cases}$$

---

*) Se cumplen todas las condiciones del teorema de Lagrange puesto que la función $f(x)$ es diferenciable (y, por tanto, continua) en todo punto del segmento $[c, x_n]$ ($[x_n, c]$), excepto el punto c. La continuidad de $f(x)$ en el punto c por la derecha (por la izquierda) se desprende de la existencia de $f'(c+0)$ ($f'(c-0)$).

Es obvio que para cualquier $x \neq 0$ la derivada de esta función existe y se determina por la fórmula $f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \operatorname{sen} \frac{1}{x}$. La existencia de la derivada $f'(0)$ en el punto $x = 0$ se desprende directamente de la existencia del valor límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cos \frac{1}{\Delta x} = 0.$$

En el punto $x = 0$ la derivada $f'(x)$ no tiene valor límite derecho ni izquierdo, puesto que en el punto $x = 0$ el sumando $2x \cos \frac{1}{x}$ tiene valor límite igual a cero, y el sumando $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ no tiene valor límite derecho ni izquierdo en este punto (véase el ejemplo al final del p. 1 en el § 8 del cap. 4).

4. Deducción de algunas desigualdades. Para concluir, mostremos de qué modo, empleando el teorema de Lagrange, pueden obtenerse algunas desigualdades muy útiles. Como ejemplo argumentamos dos desigualdades siguientes:

$$|\operatorname{sen} x_1 - \operatorname{sen} x_2| \leqslant |x_1 - x_2| \tag{8.16}$$

$$|\operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_2| \leqslant |x_1 - x_2|. \tag{8.17}$$

(Aquí, como x_1 y x_2 se puede tomar cualesquiera valores del argumento.) Para argumentar la desigualdad (8.16) apliquemos el teorema de Lagrange a la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ por el segmento $[x_1, x_2]$. Obtenemos

$$\operatorname{sen} x_1 - \operatorname{sen} x_2 = (x_1 - x_2) f'(\xi). \tag{8.18}$$

Teniendo en cuenta que $f'(\xi) = \cos \xi$ y que $|\cos \xi| \leqslant 1$ para cualquier ξ obtenemos la desigualdad (8.16) pasando en (8.18) a los módulos.

Para argumentar la desigualdad (8.17) debemos aplicar el teorema de Lagrange a la función $f(x) = \operatorname{arctg} x$ por el segmento $[x_1, x_2]$ y tomar en consideración que $f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2} \leqslant 1$.

§ 11. Fórmula generalizada de los incrementos finitos (fórmula de Cauchy)

En este párrafo demostremos el teorema que pertenece a Cauchy y generaliza el teorema de Lagrange anteriormente establecido.

***Teorema 8.16.* (*teorema de Cauchy*).** *Si cada una de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ y es diferenciable en todos los puntos interiores de este segmento y si, además, la derivada $g'(x)$ es diferente de cero en todos los puntos dentro del segmento $[a, b]$, entonces,*

dentro de este segmento existe un punto ξ *tal que es válida la fórmula*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{8.19}$$

La fórmula (8.19) se denomina *fórmula generalizada de los incrementos finitos* o *fórmula de Cauchy*.

DEMOSTRACIÓN. Ante todo, demostremos que $g(a) \neq g(b)$. En efecto, si no fuera así, para la función $g(x)$ se cumplirían todas las condiciones del teorema 8.11 (de Rolle) en el segmento $[a, b]$ y según este teorema, dentro del segmento $[a, b[$ existiría un punto ξ tal que $g'(\xi) = 0$. Lo último contradice la condición del teorema. Pues, $g(a) \neq g(b)$ y tenemos derecho de considerar la siguiente función auxiliar:

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]. \tag{8.20}$$

En virtud de las exigencias impuestas sobre las funciones $f(x)$ y $g(x)$, la función $F(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y es diferenciable en todos los puntos interiores de este segmento. Además, es obvio que $F(a) = F(b) = 0$. De este modo, para $F(x)$ se cumplen todas las condiciones del teorema 8.11 (de Rolle). Conforme a este teorema, dentro del segmento $[a, b]$ existe un punto ξ tal que

$$F'(\xi) = 0. \tag{8.21}$$

Teniendo en cuenta que $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x)$ y empleando la igualdad (8.21), tendremos

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0. \tag{8.22}$$

Tomando en consideración que $g'(\xi) \neq 0$, de la igualdad (8.22) obtenemos la fórmula de Cauchy (8.19). El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN 1. La fórmula de Lagrange (8.7) es el caso particular de la fórmula de Cauchy (8.19) para $g(x) = x$.

OBSERVACIÓN 2. En la fórmula (8.19) no es necesario tomar $b > a$.

§ 12. Resolución de las indeterminaciones (regla de L'Hospital)

1. Resolución de la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Diremos que para $x \to a$ la razón de dos funciones $\frac{f(x)}{g(x)}$ es la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ si

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0.$$

Resolver esta indeterminación significa calcular el valor límite $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ (observando la condición de que este valor límite existe).

El siguiente teorema da la regla para resolver la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$.

***Teorema 8.17* (regla de L'Hospital*)).** *Sea que dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son definidas y diferenciables en todos los puntos del entorno del punto a, excepto, tal vez, el propio punto a. Sea, luego, que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

*y la derivada $g'(x)$ es diferente de cero en todos los puntos del entorno mencionado anteriormente del punto a. Entonces, si existe valor límite **) (finito o infinito)*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{8.23}$$

entonces, existe también el valor límite $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, con tal que es válida la fórmula

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{8.24}$$

El teorema 8.17 da la regla para resolver la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ que reduce el cálculo del valor límite de la razón de dos funciones al cálculo del valor límite de la razón de sus derivadas.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n\}$ cualquier sucesión de valores del argumento convergente a a y compuesta de números diferentes de a. Consideremos esta sucesión *partiendo de un número n, desde el cual todos los x_n pertenecen al entorno del punto a mencionado en el enunciado del teorema*. Definimos completamente las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el punto a, tomándolas iguales a cero en este punto. Entonces, $f(x)$ y $g(x)$ serán evidentemente *continuas* en todo el segmento $[a, x_n]$ y diferenciables en todos los puntos interiores de este segmento. Además, $g'(x)$ es diferente de cero dentro de todo el segmento. De este modo, para $f(x)$ y $g(x)$ en el segmento $[a, x_n]$ se cumplen todas las condiciones del teorema 8.16 (de Cauchy). Según este

---

*) Guillaume François de L'Hospital, matemático francés (1661—1704).

**) Notemos que el valor límite (8.23) puede no existir, mientras el límite de la razón de las funciones $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe. Por ejemplo, se puede tomar $a = 0$, $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, $g(x) = \operatorname{sen} x$. De este modo, la regla de L'Hospital no «funciona» siempre.

teorema, dentro del segmento $[a, x_n]$ existe un punto ξ_n tal que

$$\frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)}=\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}. \qquad (8.25)$$

Teniendo en cuenta que, según la definición completa $f(a) = g(a) = 0$, podemos escribir la fórmula (8.25) del modo siguiente:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}. \qquad (8.26)$$

Sea, ahora que en la fórmula (8.26) $n \to \infty$. Entonces es obvio que $\xi_n \to a$. Ya que hemos supuesto que el valor límite (8.23) existe, entonces, para $n \to \infty$ el miembro derecho de (8.26) debe tender a este valor límite. Por lo tanto, para $n \to \infty$ existe también el límite del miembro izquierdo de (8.26). Por la definición del valor límite de la función, este límite es igual a $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. De este modo, pasando al límite para $n \to \infty$, la igualdad (8.26) se transforma en la igualdad (8.24). El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN 1. Si añadimos a las condiciones del teorema 8.17 la exigencia de la continuidad de las derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ en el punto a, entonces, observando la condición $g'(a) \neq 0$ la fórmula (8.24) puede escribirse en la forma

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}. \qquad (8.27)$$

OBSERVACIÓN 2. Si las derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$, satisfacen las mismas exigencias que las propias funciones $f(x)$ y $g(x)$, entonces se puede volver a aplicar la regla de L'Hospital (es decir, el valor límite de la razón de las primeras derivadas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ puede sustituirse por el valor límite de la *razón de las segundas derivadas de estas funciones*). En este caso obtenemos

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

OBSERVACIÓN 3. Es fácil transferir el teorema 8.17 para el caso cuando el argumento x tiende no al límite finito sino *al infinito* $a = +\infty$ o $a = -\infty$. Limitémonos a enunciar el teorema 8.17 para el caso de $a = +\infty$. *Sea que dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son definidas y diferenciables en todos los puntos de la semirrecta $c < x < \infty$. Sea, luego, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ y derivada $g'(x)$ es diferente de cero en dicha semirrecta. Entonces, si existe el valor límite $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe también el valor límite $\lim\limits_{x\to+\infty} gf(x)$ con tal que es válida la igualdad*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

EJEMPLOS.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{1}{2}$.

2) El siguiente valor límite se calcula aplicando dos veces la regla de L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

3) Aplicando tres veces la regla de L'Hospital, calculemos el valor límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2+2\cos x-2} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3}{2x-2\operatorname{sen} x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{12x^2}{2-2\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{24x}{2\operatorname{sen} x} = 12.$$

2. Resolución de la indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Diremos que, para $x\to a$, la razón de dos funciones $\frac{f(x)}{g(x)}$ es indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ si

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty\ ^{*)}. \tag{8.28}$$

Para resolver esta indeterminación, o sea, para calcular el valor límite $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, es válido la afirmación completamente análoga al teorema 8.17, a saber: *si en el enunciado del teorema* 8.17 *sustituimos la exigencia* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ *por la condición* (8.28), *el teorema* 8.17 *queda válida*.

Para demostrarla consideremos una sucesión *arbitraria* $\{x_n\}$, de valores del argumento convergente hacia a por la derecha (o por la izquierda). Sean x_m y x_n cualesquiera dos elementos de esta sucesión de números bastante grandes m y n que satisfacen la condición $n > m$.

Aplicando la fórmula de Cauchy (8.19) por el segmento $[x_m, x_n]$, podemos afirmar que en este segmento existe un punto ξ_{mn} tal que

$$\frac{f(x_n)-f(x_m)}{g(x_n)-g(x_m)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \frac{1-\frac{f(x_m)}{f(x_n)}}{1-\frac{g(x_m)}{g(x_n)}} = \frac{f'(\xi_{mn})}{g'(\xi_{mn})}.$$

De aquí,

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_{mn})}{g'(\xi_{mn})} \frac{1-\frac{g(x_m)}{g(x_n)}}{1-\frac{f(x_m)}{f(x_n)}}.$$

---

*) En vez de ∞ se puede tomar $+\infty$ o $-\infty$

Si existe $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$, entonces *para cualquier* $\varepsilon>0$ se puede fijar el número m tan grande que para cualquier $n>m$ la fracción $\frac{f'(\xi_{mn})}{g'(\xi_{mn})}$ se diferencia del número A menos que en $\varepsilon/2$. Luego, teniendo en cuenta (8.28), para m fijado podemos hallar un número n_0 tal que para $n\geqslant n_0$ la fracción

$$\frac{1-\frac{g(x_m)}{g(x_n)}}{1-\frac{f(x_m)}{f(x_n)}}$$

se diferencie de la unidad menos que en $\frac{\varepsilon/2}{|A|+\frac{\varepsilon}{2}}$. Pero, entonces, para $n\geqslant n_0$ la fracción $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ se diferencia del número A menos que en $\frac{\varepsilon}{2}+$ $+|A|\frac{\varepsilon/2}{|A|+\frac{\varepsilon}{2}}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\varepsilon/2}{|A|+\frac{\varepsilon}{2}}=\varepsilon$. Esto significa que valor límite $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ existe y es igual a A.

EJEMPLOS. 1) $\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt{x}\ln x=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}=$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}}=-2\lim_{x\to 0+0}\sqrt{x}=0.$$

2) Aplicando n veces la regla de L'Hospital, calculamos el valor límite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0.$$

3. Resolución de indeterminaciones de otras formas. Además de las indeterminaciones ya examinadas de la forma $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$, se encuentran frecuentemente las indeterminaciones de la forma siguiente: $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0.

Estas indeterminaciones se reducen a las dos ya examinadas haciendo transformaciones algebraicas. Por ejemplo, mostrémoslo respecto a *tres últimas indeterminaciones* de las mencionadas

$$y=f(x)^{g(x)},\tag{8.29}$$

donde, para $x\to a$, $f(x)$ tiende a 1, 0 ó ∞, respectivamente y $g(x)$ tiende a ∞, 0 ó 0, respectivamente. Hallando logaritmos de la expresión (8.29), obtenemos (teniendo en cuenta que $f(x)>0$)

$$\ln y=g(x)\ln f(x).\tag{8.30}$$

Para hallar el valor límite de la expresión (8.29), baste hallar dicho valor de la expresión (8.30).

Observemos que para $x \to \infty$ en cualquiera de tres casos considerados la expresión (8.30) es la indeterminación de la forma $0 \cdot \infty$. Por lo tanto, es suficiente aprender a reducir la indeterminación de la forma $0 \cdot \infty$ a la de la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$. Mostremos cómo se hace eso. Así pues, sea

$$z = \varphi(x) \cdot \psi(x), \tag{8.31}$$

con tal que

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0, \quad \lim_{x \to a} \psi(x) = \pm \infty.$$

Escribimos (8.31) en la forma

$$z = \varphi(x) \cdot \psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}. \tag{8.32}$$

Obviamente, para $x \to a$, la expresión (8.32) es la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Hemos alcanzado nuestro objetivo.

EJEMPLOS. 1) Calcúlese $\lim\limits_{x \to 0+0} x^x$. Denotemos $y = x^x$. Entonces, $\ln y = x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$. Aplicando la regla de L'Hospital, tendremos

$$\lim_{x \to 0+0} (\ln y) = \lim_{x \to 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \lim_{x \to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \to 0+0} x = 0.$$

De aquí es evidente que $\lim\limits_{x \to 0+0} y = 1$.

2) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{e^x - 1 - x}}$. Sea $y = (1 + x^2)^{\frac{1}{e^x - 1 - x}}$. Entonces,

$$\ln y = \frac{1}{(e^x - 1 - x)} \cdot \ln(1 + x^2).$$

Empleando la regla de L'Hospital, obtenemos

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{e^x - 1 - x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x}{1 + x^2}}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{(e^x - 1)(1 + x^2)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2}{e^x (1 + x^2) + (e^x - 1) 2x} = 2.$$

De aquí está claro que $\lim\limits_{x \to 0} y = e^2$.

§ 13. Fórmula de Taylor

La fórmula que se deduce en este párrafo es una de las fórmulas fundamentales del análisis matemático y tiene numerosas aplicaciones, tanto en el mismo análisis como en materias contiguas.

Teorema 8.18 (teorema de Taylor *). *Sea que en un entorno del punto a la función $f(x)$ tiene derivada de orden **) $n+1$ (n es cualquier número fijado). Sea, luego, que x es cualquier valor del argumento de dicho entorno, p, un número positivo arbitrario. Entonces, entre los puntos a y x existe un punto ξ tal que es válida la siguiente fórmula:*

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n+1}(x), \quad (8.33)$$

donde ***)

$$R_{n+1}(x)=\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p\cdot\frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}(\xi). \quad (8.34)$$

La fórmula (8.33) se denomina *fórmula de Taylor* (con centro en el punto a), y la expresión $R_{n+1}(x)$, *término residual*. Como veremos a continuación, el término residual puede escribirse tanto en la forma (8.34) como en otras formas. El término residual escrito en la forma (8.34) suele llamarse *término residual en forma general* ****).

DEMOSTRACIÓN. Mediante el símbolo $\varphi(x, a)$ denotemos el polinomio de x de orden n que figura en el miembro derecho de (8.33) o sea, pongamos

$$\varphi(x, a)=$$
$$=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (8.35)$$

Luego, mediante $R_{n+1}(x)$ denotemos la diferencia

$$R_{n+1}(x)=f(x)-\varphi(x, a). \quad (8.36)$$

El teorema quedará demostrado si establecemos que $R_{n+1}(x)$ se determina por la fórmula (8.34).

---

*) Brook Taylor, matemático inglés (1685—1731).

**) De aquí se desprende que *la propia función $f(x)$ y sus derivadas de hasta el orden n son continuas en dicho entorno del punto a.*

***) Ya que ξ se sitúa entre x y a, entonces $\frac{x-a}{x-\xi}>0$, así que la expresión $\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p$ está definida para cualquier $p>0$.

****) Esta forma del término residual se denomina también forma de Schlömilch — Roche.

Fijemos cualquier valor x del entorno mencionado en el enunciado del teorema. Para la precisión, tomaremos $x > a$. Mediante t denotemos la magnitud variable cuyo campo de definición es el segmento $[a, x]$ y consideremos la función auxiliar $\psi(t)$ del tipo siguiente:

$$\psi(t) = f(x) - \varphi(x, t) - (x-t)^p Q(x), \tag{8.37}$$

donde

$$Q(x) = \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^p}. \tag{8.38}$$

Con más detalles, $\psi(t)$ puede escribirse del modo siguiente:

$$\psi(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \ldots$$
$$\ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - (x-t)^p Q(x). \tag{8.39}$$

Nuestro objetivo es expresar $Q(x)$ utilizando las propiedades de la función introducida $\psi(t)$.

Mostremos que la función $\psi(t)$ satisface todas las condiciones del teorema 8.11 (de Rolle) en el segmento $[a, x]$.

De la fórmula (8.39) y de las condiciones impuestas sobre la función $f(x)$ se desprende que la función $\psi(t)$ es continua sobre el segmento $[a, x]$ y diferenciable en él *). Cerciorémonos de que $\psi(a) = \psi(x) = 0$. Poniendo $t = a$ en (8.37) y tomando en consideración la igualdad (8.38), tendremos

$$\psi(a) = f(x) - \varphi(x, a) - R_{n+1}(x).$$

De aquí, conforme a (8.36), obtenemos $\psi(a) = 0$. La igualdad $\psi(x) = 0$ se desprende inmediatamente de la fórmula (8.39).

Así pues, en el segmento $[a, x]$ para la función $\psi(t)$ se cumplen todas las condiciones del teorema 8.11 (de Rolle). De acuerdo con este teorema, dentro del segmento $[a, x]$ existe un punto ξ tal que

$$\psi'(\xi) = 0. \tag{8.40}$$

Calculemos la derivada $\psi'(t)$. Diferenciando la igualdad (8.39), tendremos

$$\psi'(t) = -f'(t) + \frac{f'(t)}{1!} - \frac{f^{(2)}(t)}{1!}(x-t) +$$
$$+ \frac{f^{(2)}(t)}{2!}2(x-t) - \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1} -$$
$$- \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p(x-t)^{p-1}Q(x). \tag{8.41}$$

*) La función $f(t)$ y sus derivadas de hasta el orden n son continuas en el segmento $[a, x]$, y $f^{n+1}(t)$ existe y es finita en este segmento (véase la nota *) en la pág. 262).

Es fácil ver que todos los términos del miembro derecho de (8.41), excepto dos últimos, se eliminan mutuamente. De este modo,

$$\psi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p(x-t)^{p-1}Q(x). \qquad (8.42)$$

Poniendo en la fórmula (8.42) $t = \xi$ y empleando la igualdad (8.40), obtenemos

$$Q(x) = \frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}(\xi). \qquad (8.43)$$

Comparando (8.43) y (8.38), tendremos definitivamente

$$R_{n+1}(x) = (x-a)^p Q(x) = \frac{(x-a)(x-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}(\xi).$$

El teorema queda demostrado.

Valiéndose de la fórmula de Taylor hallemos el desarrollo de la función simple, *polinomio algebraico de n-ésimo orden*. Sea

$$f(x) = C_0x^n + C_1x^{n-1} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

Entonces, ya que $f^{(n+1)}(x) = 0$, el término residual $R_{n+1}(x) = 0$ y la fórmula de Taylor (8.33) toma la forma

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \qquad (8.44)$$

(Aquí, como a puede tomarse cualquier punto de recta infinita.) De este modo, la fórmula de Taylor permite representar cualquier polinomio $f(x)$ *en forma de polinomio respecto a las potencias de* $(x-a)$, donde p es cualquier número real.

Sea, ahora, $f(x)$ *función arbitraria* que satisface las condiciones del teorema 8.18. Tratemos de aclarar qué propiedades posee el polinomio (8.35) que figura en la fórmula de Taylor para esta función. Como anteriormente, denotaremos este polinomio por el símbolo $\varphi(x, a)$. Mediante el símbolo $\varphi^{(n)}(x, a)$ denotaremos la n-ésima derivada de $\varphi(x, a)$ respecto a x. Diferenciando la fórmula (8.35) respecto a x y poniendo después $x = a$, obtenemos las igualdades siguientes:

$$\varphi(a, a) = f(a),$$
$$\varphi'(a, a) = f'(a),$$
$$\varphi^{(2)}(a, a) = f^{(2)}(a),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi^{(n)}(a, a) = f^{(n)}(a)$$

De este modo, el polinomio $\varphi(x, a)$ que figura en la fórmula de Taylor para una función arbitraria $f(x)$ posee la propiedad de que el

mismo y sus derivadas de hasta el orden n, inclusive, son iguales, en el punto $x = a$, a $f(x)$ y sus derivadas de hasta el orden n, respectivamente.

§ 14. Diferentes formas del término residual. Fórmula de Maclaurin

1. Término residual en forma de Lagrange, Cauchy y Peano. Anteriormente hemos establecido la fórmula de Taylor con el término residual *en forma general*. Aquí establecemos otras fórmulas posibles para el término residual. Obtenemos dos de ellas como casos particulares de la forma general del término residual.

Ante todo, transformemos un poco la fórmula para el término residual (8.34). Ya que el punto ξ se comprende entre los puntos a y x *existe un punto* θ *) *del intervalo* $0 < \theta < 1$ tal que $\xi - a = \theta (x - a)$. Además, $\xi = a + \theta (x - a)$, $x - \xi = (x - a)(1 - \theta)$. De este modo, la fórmula (8.34) puede escribirse en la forma

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]. \qquad (8.45)$$

Consideremos ahora dos casos particulares importantes de la fórmula (8.45): 1) $p = n + 1$, 2) $p = 1$ (recordemos que en las fórmulas (8.34) y (8.45) como p se puede tomar cualquier número positivo). El primero de estos casos particulares ($p = n + 1$) lleva al término residual *en forma de Lagrange*

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]. \qquad (8.46)$$

Esta forma del término residual es más usada en las aplicaciones. El término residual en forma de Lagrange se parece al término siguiente de la fórmula de Taylor, sólo la $(n + 1)$-ésima derivada de la función $f(t)$ se calcula no en el punto a, sino en un punto intermedio entre a y x $\xi = a + \theta (x - a)$. El segundo de los casos anteriormente mencionados ($p = 1$) lleva al término residual *en forma de Cauchy*

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n}}{n!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]. \qquad (8.47)$$

Ya que las formas de Lagrange y Cauchy corresponden a varios valores de p y θ depende de p, entonces, hablando en general, los valores θ en las fórmulas (8.46) y (8.47) son *diferentes*. Para estimar algunas funciones la forma de Cauchy es más preferible que la de Lagrange. Ambas formas del término residual (de Lagrange y Cauchy)

*) Cabe subrayar que ξ, y, por tanto, θ dependen tanto de x y n como también de p.

suelen emplearse si para unos u otros valores fijados de x, diferentes de a, es necesario *calcular aproximadamente la función* $f(x)$.

Es lógico sustituir aproximadamente $f(x)$ por el polinomio $\varphi(x, a)$ y estimar numéricamente el error hecho. Además, se encuentran problemas, en los cuales no nos interesa el valor numérico de dicho error, sino *solamente el orden de su magnitud relativamente pequeña* $(x - a)$. Para esto, es cómoda otra forma de denotación del término residual (la llamada *forma de Peano* *)) la cual vamos a formular.

Sea que la función $f(x)$ *tiene derivadas de hasta el orden* $(n - 1)$ *en un entorno del punto* a *y la derivada de orden* n *en el propio punto* a.

Igual que anteriormente, denotemos la diferencia de la función $f(x)$ y el polinomio (8.35) mediante $R_{n+1}(x)$ y demostremos que para $R_{n+1}(x)$ es válida la siguiente igualdad

$$R_{n+1}(x) = o\,[(x - a)^n]. \tag{8.48}$$

La última igualdad es la que se denomina término residual representado *en forma de Peano*.

Ya que, en las suposiciones hechas, el polinomio (8.35) y sus derivadas de hasta el orden n inclusive coinciden, en el punto $x = a$, con la función $f(x)$ y sus derivadas, respectivamente, tomadas en el mismo punto $x = a$, entonces son válidas las desigualdades,

$$R_{n+1}(a) = 0, \ \ R'_{n+1}(a) = 0, \ \ \ldots, \ \ R_{n+1}^{(n-1)}(a) = 0, \ \ R_{n+1}^{(n)}(a) = 0 \tag{8.49}$$

y nos queda demostrar que de las desigualdades (8.49) se desprende la fórmula (8.48).

Para hacerlo es suficiente, empleando las igualdades (8.49) demostrar que

$$\lim_{x\to a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = 0. \tag{8.50}$$

Puesto que cada una de las funciones $R_{n+1}(x)$ y $(x - a)^n$ es diferenciable $(n - 1)$ veces en todos los puntos de cierto entorno del punto a, son válidas las desigualdades (8.49) y toda derivada de la función $(x - a)^n$ de hasta el orden $(n - 1)$ inclusive se anula *solamente en el punto* a, entonces, para resolver la indeterminación que está en el miembro izquierdo de (8.50), se puede aplicar $(n - 1)$ veces sucesivamente el teorema de L'Hospital 8.17 y, como resultado, se obtiene

$$\lim_{x\to a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{R'_{n+1}(x)}{n\cdot(x-a)^{n-1}} = \cdots = \lim_{x\to a} \frac{R_{n+1}^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-a)}. \tag{8.51}$$

---

*) Giuseppe Peano, matemático italiano (1858—1932).

Teniendo en cuenta la penúltima igualdad (8.49), podemos escribir (8.51) en la forma

$$\lim_{x\to a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = \frac{1}{n!} \lim_{x\to a} \frac{R_{n+1}^{(n-1)}(x) - R_{n+1}^{(n-1)}(a)}{x-a}.$$

Ya que la derivada $R\,(a_{n+1}^{(n)})$ existe y en virtud de la última relación (8.49) es igual a cero, entonces, el valor límite del miembro derecho de la última igualdad existe y es igual a cero lo que demuestra la igualdad (8.50).

Por lo tanto, la deducción de la fórmula (8.48) queda terminada.

Para concluir escribimos por completo la fórmula de Taylor con el término residual en la forma de Peano

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\,[(x-a)^n]. \tag{8.52}$$

2. **Otra denotación de la fórmula de Taylor.** La fórmula de Taylor (8.33) se escribe frecuentemente en otra forma un poco distinta. Pongamos en (8.33) $a = x_0$, $(x - a) = \Delta x$ y tomemos el término residual en forma de Lagrange (8.46). Además, $x = x_0 + \Delta x$ y obtenemos

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}. \tag{8.53}$$

(Aquí θ es un número del intervalo $0 < \theta < 1$). La fórmula de Taylor (8.53) es la generalización natural de la fórmula de Lagrange (8.11) (véase el § 9). La fórmula de Lagrange (8.11) se obtiene de la fórmula (8.53) en el caso particular de $n = 0$.

3. **Fórmula de Maclaurin.** Suele llamarse *fórmula de Maclaurin* *) fórmula de Taylor (8.33) con centro en el punto $a = 0$. De este modo, la fórmula de Maclaurin representa la función en el entorno del punto $x = 0$. Escribimos la fórmula de Maclaurin para una función arbitraria $f(x)$ con el término residual en forma de Lagrange, Cauchy y Peano **):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x), \tag{8.54}$$

donde el término residual tiene la forma:

1) de Lagrange

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) \quad (0 < \theta < 1), \tag{8.55}$$

*) Colin Maclaurin, matemático inglés (1698—1746).

**) Además, se supone que en el entorno del punto $x = 0$ $f(x)$ tiene $(n + 1)$-ésima derivada, en el propio punto $x = 0$, n-ésima derivada y para el término residual en forma de Peano, $(n - 1)$-ésima derivada.

2) de Cauchy *)

$$R_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\theta x)\quad (0<\theta<1), \tag{8.56}$$

3) de Peano

$$R_{n+1}(x)=o(x^n). \tag{8.57}$$

(Hemos empleado las fórmulas (8.46), (8.47) y (8.48).)

Pasamos a estimar el término residual de la fórmula de Taylor — Maclaurin, hallar el desarrollo de las funciones elementales más importantes por la fórmula de Maclaurin y considerar varias aplicaciones de esta fórmula.

§ 15. Estimación del término residual. Desarrollo de algunas funciones elementales

1. Estimación del término residual para una función arbitraria. Estimemos, para una función arbitraria $f(x)$, el término residual de la fórmula de Maclaurin tomado en forma de Lagrange (8.55).

Supongamos que la función considerada $f(x)$ posee la siguiente propiedad: *existe un número real M tal que para todos los números n y para todos los valores del argumento x del entorno considerado del punto $x=0$ es válida la desigualdad*

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant M. \tag{8.58}$$

La función que posee dicha propiedad se denominará *función cuyo conjunto de todas las derivadas está acotado en el entorno del punto $x=0$.*

De la desigualdad (8.48) se desprende que

$$|f^{(n)}(\theta x)|\leqslant M, \tag{8.59}$$

y por eso de la fórmula (8.55) se desprende que

$$|R_{n+1}(x)|=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\theta x)\right|\leqslant M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Así pues, *obtenemos la siguiente estimación universal del término residual para la función cuyo conjunto de todas las derivadas está acotado por el número M en el entorno del punto $x=0$:*

$$|R_{n+1}(x)|\leqslant M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{8.60}$$

Recordemos que para cualquier x fijado

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

---

*) Subrayemos otra vez que hablando en general, en las fórmulas (8.55) y (8.56) los valores de θ son diferentes.

(véase el ejemplo 3 del p. 3 del § 3 del cap. 3). De aqui se desprende miembro derecho de (8.60) cualquier pequeño que sea. Esto nos permite aplicar la fórmula de Maclaurin para el cálculo aproximado de las funciones que poseen dicha propiedad con cualquier exactitud anticipadamente fijada. Aduzcamos ejemplos de las funciones cuyo conjunto de todas las derivadas está acotado en el entorno del punto $x = 0$.

1) $f(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x$. El conjunto de todas las derivadas de esta función está acotado por el número $M = e^r$ sobre cualquier segmento $[-r, r]$ $(r > 0)$.

2) $f(x) = \cos x$ ó $f(x) = \operatorname{sen} x$. El conjunto de todas las derivadas de cada una de estas funciones está acotado por el número $M = 1$ sobre toda la recta infinita.

2. **Desarrollo de algunas funciones elementales por la fórmula de Maclaurin.**

A. $f(x) = e^x$. Ya que $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$ para cualquier n, la fórmula de Maclaurin (8.54) tiene la forma

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x), \qquad (8.61)$$

donde el término residual en forma de Lagrange es igual a

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1).$$

En todo segmento $[-r, +r]$ $(r > 0)$, debido a que $|e^{\theta x}| < e^r$, obtenemos la siguiente estimación para el término residual:

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} e^r. \qquad (8.62)$$

B. $f(x) = \operatorname{sen} x$. Ya que $f^{(n)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$,

$$f^{(n)}(0) = \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2} \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par,} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

la fórmula de Maclaurin (8.54) tiene la forma

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!} + R_{n+2}(x), \qquad (8.63)$$

donde n es número impar y el término residual en forma de Lagrange es igual a

$$R_{n+2}(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \operatorname{sen}\left(\theta x + n\frac{\pi}{2} + \pi\right) \quad (0 < \theta < 1).$$

Es obvio que en todo segmento $[-r, +r]$ $(r > 0)$ para el término residual es válida la siguiente estimación:

$$|R_{n+2}(x)| \leqslant \frac{r^{n+2}}{(n+2)!}. \qquad (8.64)$$

C. $f(x) = \cos x$. Ya que $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$,

$$f^{(n)}(0) = \cos n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases}$$

la fórmula de Maclaurin (8.54) tiene la forma

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{x^n}{n!} + R_{n+2}(x), \qquad (8.65)$$

donde n es número par y el término residual en forma de Lagrange es igual a

$$R_{n+2}(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\cos\left(\theta x + n\frac{\pi}{2} + \pi\right) \quad (0 < \theta < 1).$$

Sobre todo segmento $[-r, +r]$ $(r > 0)$ obtenemos, para el término residual, la estimación (8.64).

D. $f(x) = \ln(1 + x)$. Ya que para $n \geqslant 1$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},$$

$$f(0) = 0, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

la fórmula de Maclaurin (8.54) tiene la forma

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x). \quad (8.66)$$

Esta vez escribamos y estimemos el término residual tanto *en forma de Lagrange como en forma de Cauchy*:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \quad \text{(en forma de Lagrange)}, \qquad (8.67)$$

$$R_{n+1}(x) = (-1)^n x^{n+1}\frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \text{ *)} \quad \text{(en forma de Cauchy)}. \qquad (8.58)$$

Si estimamos la función $\ln(1 + x)$ para los valores x pertenecientes al segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$, es más conveniente utilizar el término residual en forma de Lagrange (8.67). Pasando en la fórmula (8.67) a los módulos, para todos los x del segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$ obtenemos

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{1}{n+1}. \qquad (8.69)$$

*) Notemos otra vez que, hablando en general, en las fórmulas (8.67) y (8.68), los valores de θ son diferentes.

De la estimación (8.69) es obvio que para todos los x del segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$ $R_{n+1}(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Estimemos ahora la función $\ln(1+x)$ para los valores *negativos* x del segmento $-r \leqslant x \leqslant 0$, donde $0 < r < 1$. Para hacerlo, utilizamos el término residual en forma de Cauchy (8.68).

Escribimos este término residual en la forma

$$R_{n+1}(x) = (-1)^n \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \frac{x^{n+1}}{1+\theta x}. \tag{8.70}$$

Tomando en consideración que para los valores considerados de x $\frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$ y pasando a los módulos en la fórmula (8.70) tendremos

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{r^{n+1}}{1-r}. \tag{8.71}$$

Ya que $0 < r < 1$, entonces la estimación (8.71) permite comprobar que $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$.

E. $f(x) = (1+x)^\alpha$, donde α es número real. Puesto que

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1),$$

la fórmula de Maclaurin (8.54) tiene la forma

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x), \tag{8.72}$$

donde el término residual en forma de Lagrange es igual a

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1). \tag{8.73}$$

En el caso particular cuando $\alpha = n$ es número entero, $R_{n+1}(x) = 0$ obtenemos la fórmula del binomio de Newton conocida del curso de matemáticas elementales

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^n. \tag{8.74}$$

Si es necesario obtener el desarrollo no del binomio $(1+x)^n$, sino del binomio $(a+x)^n$, entonces se puede sacar a^n del paréntesis y emplear la fórmula (8.74). En este caso obtenemos

$$(a+x)^n = a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n = a^n\left[1 + \frac{n}{1!}\left(\frac{x}{a}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x}{a}\right)^n\right].$$

De este modo, el caso general del binomio de Newton es el caso particular de la fórmula de Maclaurin.

F. $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Podemos cerciorarnos de que

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par,} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

De esta manera, la fórmula de Maclaurin (8.54) con el término residual en forma de Peano (8.57) tiene la forma

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

Aquí n es número impar.

§ 16. Ejemplos de aplicaciones de la fórmula de Maclaurin

1. Algoritmo para calcular el número e. En el p. 4 del § 3 del cap. 3 hemos introducido el número e como el límite $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ y hemos obtenido para e la estimación aproximada (véase la fórmula (3.7) del cap. 3) $2 \leqslant e \leqslant 3$. Ahora mostremos cómo se calcula el número e con cualquier grado de exactitud que nos interesa. Empleemos la fórmula de Maclaurin (8.61) y la estimación del término residual (8.62) poniendo en estas fórmulas $x = r = 1$. Obtenemos

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + R_{n+1}(1), \tag{8.75}$$

donde

$$|R_{n+1}(1)| < \frac{e}{(n+1)!} \leqslant \frac{3}{(n+1)!}. \tag{8.76}$$

Empleando estas fórmulas y escogiendo en ellas n bastante grande, podemos estimar el número e con cualquier grado de exactitud que nos interesa.

2. Realización del algoritmo para calcular el número e en un ordenador. El algoritmo para calcular el número e mencionado en el punto anterior se realiza fácilmente en los ordenadores.

Aduzcamos el cálculo del número e por la fórmula (8.75) para $n = 400$ en el ordenador BESM-6 *). Los cálculos se realizaron para

*) Para los lectores que conocen el lenguaje algorítmico estándar ALGOL aduzcamos el programa de cálculos escrito en este lenguaje:

```
Sistema Algol — BESM-6, variante 10—12—69
begin integer i, c, p, n, m; integer array a, b, e [0: 601];
  m: = 400; marg (39, 50, 39, 10, 0, 0);
  e [0]: = 1; b [0]: = 1;
```

600 cifras a la derecha de la coma. Teniendo en cuenta los errores posibles del redondeo, hemos omitido las últimas 10 cifras y aduzcamos el resultado del cálculo para 590 cifras y la derecha de la coma:

2,718281 828459 045235 360287 471352 662497 757247 093699
959574 966967 627724 076630 353547 594571 382178 525166 427427
466391 932003 059921 817413 596629 043572 900334 295260 595630
738132 328627 943490 763233 829880 753195 251019 011573 834187
930702 154089 149934 884167 509244 761460 668082 264800 168477
411853 742345 442437 107539 077744 992069 551702 761838 606261
331384 583000 752044 933826 560297 606737 113200 709328 709127
443747 047230 696977 209310 141692 836819 025515 108657 463772
111252 389784 425056 953696 770785 449969 967946 864454 905987
931636 889230 098793 127736 178215 424999 229576 351482 208269
895193 668033 182528 869398 496465 105820 939239 829488 793320
36...

Notemos que el ordenador tardó aproximadamente un minuto en realizar todos estos cálculos.

3. Empleo de la fórmula de Maclaurin para estimaciones asintóticas **) de funciones elementales y para calcular límites. La fórmula de Maclaurin es un medio eficaz para obtener estimaciones asintóticas de funciones elementales y para calcular límites.

En el cap. 4 hemos establecido las siguientes fórmulas asintó-

---

```
  for i: = 1 step 1 until 601 do
    a [i]: = b [i]: = e [i]: = 0;
  for n: = 1 step 1 until m do
  begin for i: = 0 step 1 until 600 do
    a [i]: = b [i]; c: = a [0];
    for i = 0 step 1 until 600 do
    begin b [i]: = c ÷ n;
     c: = (c − n × b [i] × 10 + a [i + 1) end
    p: = 0;
  for i: = 600 step − 1 until x do
  begin c: = e [i] + b [i] + p.
     p: = 0;
     if c < 10 then e [i]: = c else
     begin e [i]: = c − 10; p: = 1 end
    end
  end
  for n: = 1 step 1 until 6 do
  begin output ('10/', 'zd', e [0]);
     for i: = 1 step 1 until 590 do
   output ('zd'), e ([i])
  end
end
```

**) La fórmula o estimación que caracteriza el comportamiento de $f(x)$ para $x \to a$ (aquí para $x \to 0$) se denomina *asintótica*.

ticas para las funciones elementales:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= x + o(x), \\ \sqrt[n]{1+x} &= 1 + \frac{x}{n} + o(x), \\ \ln(1+x) &= x + o(x), \\ e^x &= 1 + x + o(x), \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}\right\} \quad (8.77)$$

Las fórmulas (8.77) dan representaciones de las funciones elementales para valores pequeños de $|x|$. Las cuatro primeras fórmulas de (8.77) estiman las funciones elementales correspondientes con exactitud de hasta términos *de primer grado* respecto a la magnitud pequeña x, y la última de las fórmulas (8.77), con exactitud de hasta términos de *segundo grado* respecto a x.

Las estimaciones (8.77) resultan suficientes para calcular límites más simples. Sin embargo, para calcular límites más complicados en los cuales desempeñan el papel determinante los términos de grado superior respecto a la magnitud pequeña x, las fórmulas (8.77) son insuficientes. Así, por ejemplo, empleando las fórmulas (8.77) es imposible calcular el valor límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}, \quad (8.78)$$

puesto que al examinar el denominador se puede deducir que aquí desempeñan el papel determinante los términos de *tercer grado* respecto a x.

De este modo, para calcular los límites finos es necesario obtener estimaciones asintóticas más exactas para las funciones que están en los miembros izquierdos de las fórmulas (8.77).

Estas estimaciones se desprenden inmediatamente de la fórmula de Maclaurin (8.54) si en esta fórmula tomamos el término residual en forma de Peano (8.57). Escribiendo las fórmulas de Maclaurin (8.63), (8.72), (8.66), (8.61) y (8.65) y tomando en cada una de ellas el término residual en forma de Peano, obtenemos las siguientes estimaciones asintóticas:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!} + o(x^{n+1}), \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots \\ &\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n), \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \end{aligned}\right\} \quad (8.79)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{x^n}{n!} + o(x^{n+1}).$$

(Aquí, en la primera de las fórmulas (8.79) n es cualquier número *impar*, y en la última de las fórmulas (8.79), n es cualquier número *par*.) Las fórmulas (8.79) estiman las funciones elementales correspondientes con exactitud de hasta términos de *cualquier grado* n respecto a la magnitud pequeña x. Estas fórmulas son medios eficaces para calcular algunos valores límite finos.

Aduzcamos ejemplos del empleo de las fórmulas asintóticas (8.79).

1°. A título de primer ejemplo consideremos el valor límite (8.78) mencionado anteriormente. Aplicando la primera de las fórmulas (8.79) (tomada para $n = 3$), tendremos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left[-\frac{1}{3!} + o(x) \right] = -\frac{1}{3!}.$$

2°. $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \operatorname{sen} x}$.

Partiendo del tipo del denominador se puede deducir que el papel determinante deben desempeñarlo los términos de cuarto grado respecto a x (puesto que $\operatorname{sen} x = x + o(x)$). Empleando las fórmulas (8.79), podemos escribir

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5), \tag{8.80}$$

$$\operatorname{sen} x = x + o(x), \tag{8.81}$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + o(z^2).$$

Por lo tanto, si $z = -x^2/2$ obtenemos

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4). \tag{8.82}$$

En virtud de las fórmulas (8.80), (8.81) (8.82) el valor límite buscado puede escribirse en la forma

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}}{x^4 + o(x^4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \alpha(x)}{1 + \alpha(x)} = \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{1}{12}.$$

(Aquí, mediante el símbolo $\alpha(x)$ hemos denotado la magnitud $\frac{o(x^4)}{x^4}$ que es infinitesimal para $x \to 0$.)

3°. $I = \lim\limits_{x \to 0} \left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x(\operatorname{sen} x - x)}}$.

Mediante y denotemos la magnitud *) $y = \left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x(\operatorname{sen} x - x)}}$
Entonces los $I = \lim\limits_{x \to 0} y$. Hallando los logaritmos para la expresión de y, tendremos

$$\ln y = \frac{1}{x(\operatorname{sen} x - x)} \ln \left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right).$$

Calculemos

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln \left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)}{x(\operatorname{sen} x - x)}.$$

Puesto que $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ y $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, obtenemos

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)}{-\frac{x^4}{6} + o(x^5)}.$$

Ahora tomemos en consideración que $\ln(1 + z) = z + o(z)$. De esta fórmula se desprende

$$\ln \left(1 + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) = \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

De esto modo,

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{24} + o(x^4)}{-\frac{x^4}{6} + o(x^5)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{24} + \frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{1}{6} + o(x)} = -\frac{1}{4}.$$

De aquí se deduce

$$I = \lim_{x \to 0} y = e^{-\frac{1}{4}}.$$

---

*) Para x pequeños la expresión $\left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)$ es anticipadamente *positiva*.

Complemento

Cálculo de funciones elementales

En el presente Complemento examinaremos el problema del cálculo de valores de las funciones elementales más simples.

Para calcular los valores de todas las funciones mencionadas, se utilizan dos tipos de algoritmos, el primero de los cuales se basa en el desarrollo de la función calculada por la fórmula de Taylor, y el segundo, en su desarrollo en la fracción continua. El primer algoritmo permite elaborar el programa común para calcular los valores de las funciones logarítmica y trigonométricas inversas. El segundo algoritmo es base del programa universal para calcular las demás funciones elementales más simples.

Además de argumentar dichos algoritmos, estimaremos el número de iteraciones que garantizan la exactitud dada de los cálculos.

1. Cálculo de las funciones logarítmica y trigonométricas inversas. El cálculo de estas funciones se hace basándose en la fórmula de Taylor. Consideraremos detalladamente el problema del cálculo del logaritmo y del arco tangente. El cálculo de los valores de $\operatorname{arcctg} x$, $\operatorname{arcsen} x$ y $\arccos x$ se reduce fácilmente al cálculo del arco tangente empleando las siguientes fórmulas conocidas:

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x, \quad \operatorname{arcsen} x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\arccos x = \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1. CÁLCULO de $\ln a$. Representemos el número $a > 0$ en la forma siguiente:

$$a = 2^p M, \tag{8.83}$$

donde p es número entero, y M satisface las condiciones

$$\frac{1}{2} \leqslant M < 1. \tag{8.84}$$

Notemos que la representación de a en la forma (8.83) es la única. Empleando la fórmula (8.83), obtenemos la siguiente expresión para $\ln a$:

$$\ln a = p \ln 2 + \ln M. \tag{8.85}$$

Haciendo

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1+x}{1-x} \tag{8.86}$$

y poniendo esta expresión para M en (8.85), transformemos la fórmula (8.86) para $\ln a$ en la forma siguiente:

$$\ln a = \left(p - \frac{1}{2}\right) \ln 2 + \ln \frac{1+x}{1-x}. \tag{8.87}$$

Desarrollemos la función $\ln \frac{1+x}{1-x}$ por la fórmula de Maclaurin. Es fácil cerciorarse de que este desarrollo con el término residual en forma de Lagrange tiene la forma siguiente:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \ldots + \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+3}(x), \tag{8.88}$$

donde

$$R_{2n+2}(x)=\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\left[\frac{1}{(1+\theta x)^{2n+2}}-\frac{1}{(1-\theta x)^{2n+2}}\right], \qquad (8.89)$$

y el número θ está comprendido estrictamente entre el cero y la unidad.

Para calcular aproximadamente $\ln a$ se usa la siguiente fórmula:

$$\ln a\approx\left(p-\frac{1}{2}\right)\ln 2+2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right), \qquad (8.90)$$

que se obtiene de (8.87), al sustituir $\ln\frac{1+x}{1-x}$ por la parte de la fórmula de Maclaurin (8.88) para esta función sin tomar el término residual $R_{2n+2}(x)$. Observemos que en la fórmula aproximada (8.90) para $\ln a$ el número x se determina valiéndose de la fórmula (8.86) y tomando en consideración las restricciones (8.84) impuestas sobre M.

Pasamos a estimar el error de la fórmula (8.90). Ya que el valor aproximado de $\ln a$ calculado por la fórmula (8.90) se diferencia del valor exacto calculado por la fórmula (8.87) solamente en el valor del término residual $R_{2n+2}(x)$, entonces, para determinar el error, basta estimar este término residual.

En primer lugar, aclaremos los límites de la variación de x. De la fórmula (8.86) obtenemos

$$x=\frac{M\sqrt{2}-1}{M\sqrt{2}+1}. \qquad (8.91)$$

De (8.91) se desprende que, para los valores de M que satisfacen las desigualdades (8.84), el valor absoluto de x satisface la condición *)

$$|x|<0{,}172 \qquad (8.92)$$

Observemos ahora que la estructura del término residual $R_{2n+2}(x)$ es tal que la estimación puede realizarse de la manera igual para los valores positivos y negativos de x (de la fórmula (8.89) se desprende que la sustitución de x por $-x$ no cambia la estructura de $R_{2n+2}(x)$). Por eso, es suficiente obtener la estimación de $R_{2n+2}(x)$ para $x\geqslant 0$. Teniendo en cuenta este hecho y la igualdad (8.92) y sustituyendo en el miembro derecho de (8.89) la magnitud x por el número 0,172, la magnitud $\frac{1}{1+\theta x}$ por la unidad, y la magnitud $\frac{1}{1-\theta x}$ por el número $\frac{1}{1-0{,}172}$ obtenemos la siguiente estimación:

$$|R_{2n+2}(x)|\leqslant\frac{(0{,}172)^{2n+2}}{2n+2}\left[1+\frac{1}{(1-0{,}172)^{2n+2}}\right].$$

En la última fórmula, pone $(0{,}172)^{2n+2}$ entre los corchetes. Ya que $\frac{0{,}172}{1-0{,}172}<$ $<0{,}208$, obtenemos la siguiente estimación para $R_{2n+2}(x)$:

$$|R_{2n+2}(x)|\leqslant\frac{(0{,}172)^{2n+2}+(0{,}208)^{2n+2}}{2n+2}. \qquad (8.93)$$

Al calcular $\ln a$ en el ordenador **) se suele tomar la fórmula (8.90) para

*) Ya que x es función de M, entonces el problema se reduce a la búsqueda del valor máximo del módulo de la función (8.91) en el segmento [1/2, 1].

**) Exactamente de este modo se calcula $\ln a$ en el ordenador BESM-6

$n = 6$. Para este caso, la exactitud de los cálculos se estima, como se ve de (8.93), por el número $\frac{(0,172)^{14} + (0,208)^{14}}{14}$ que no supera a $1,625 \cdot 10^{-10}$.

2. CÁLCULO de arctg α. Evidentemente, podemos limitarnos al caso de los valores positivos del argumento, puesto que, tomando $|\alpha| = 0$, hallamos

$$\operatorname{arctg} \alpha = \operatorname{sgn} \alpha \cdot \operatorname{arctg} x.$$

Ahora indiquemos transformaciones normales empleando las cuales el cálculo de arctg x, para los valores del argumento x no inferiores a 1/8, se reduce al cálculo del arco tangente para los valores del argumento inferiores a 1/8.

Sea primeramente $x \geqslant 1$. Hagamos $y = \operatorname{arctg} x$, es decir, $x = \operatorname{tg} y$ y $x_1 = \operatorname{tg}(y - \operatorname{arctg} 1)$. De la última fórmula obtenemos $x_1 = \frac{\operatorname{tg} y - 1}{\operatorname{tg} y + 1} = \frac{x-1}{x+1} < 1$. Ya que $\operatorname{arctg} x = \operatorname{actg} 1 + \operatorname{arctg} x_1 = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} x_1$, entonces el cálculo de arctg x para los valores $x \geqslant 1$ se reduce al cálculo de arctg x_1 para $0 < x_1 < 1$.

Examinemos ahora el caso cuando el argumento satisface las desigualdades $\frac{1}{8} \leqslant x < 1$.

Sea $k_1 = 1$, $k_2 = 1/2$, $k_3 = 1/4$, $k_4 = 1/8$. Evidentemente, para cierto $i = 1, 2, 3, 4$ se cumplen las desigualdades

$$k_i \leqslant x < 2k_i \tag{8.94}$$

Hagamos $y = \operatorname{arctg} x$, es decir, $x = \operatorname{tg} y$ y $x_i = \operatorname{tg}(y - \operatorname{arctg} k_i)$. De esta fórmula obtenemos

$$x_i = \frac{\operatorname{tg} y - k_i}{1 + k_i \operatorname{tg} y} = \frac{x - k_i}{1 + k_i x}.$$

Ya que $x > 0$, entonces $1 + k_i x > 1$. Además, según la desigualdad derecha de (8.94), $x - k_i < 2k_i - k_i$. Por eso, de la última expresión para x_i obtenemos la desigualdad $x_i < k_i$. Ya que $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} k_i + \operatorname{arctg} x_i$, entonces el cálculo de arctg x para los valores x que satisfacen las desigualdades (8.94), se reduce al cálculo de arctg x_i para $0 < x_i < k_i$.

Al repetir las transformaciones descritas del argumento x cuatro veces al máximo, reducimos el cálculo de arctg x para los valores x del semiintervalo $1/8 \leqslant x < 1$ al cálculo del arco tangente para los valores del argumento inferiores a 1/8.

Para calcular arctg x para $x < 1/8$ se utiliza la fórmula de Maclaurin

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+2}(x).$$

Para hacer cálculos suelen tomar la última fórmula para $n = 6$ eliminando el término residual *). El programa para calcular el logaritmo es el mismo que para el arco tangente. Empleando este programa para el arco tangente, hay que tener en cuenta que los signos de los términos vecinos $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ se cambian.

2. Cálculo de las funciones trigonométricas, la función exponencial y las funciones hiperbólicas. El cálculo de estas funciones se hace empleando *fracciones continuas*. Las propiedades de estas fracciones se dan a continuación en el p. 1.

El cálculo de todas las funciones enumeradas se efectúa utilizando una fracción continua que se obtiene al desarrollar la función th x. Por eso, examine-

---

*) Precisamente de este modo se hace, por ejemplo, para efectuar cálculos en el ordenador BESM-6

mos detalladamente el cálculo de los valores de la función th x y después indiquemos como se calculan las demás funciones.

1. ALGUNAS NOCIONES DE LAS FRACCIONES CONTINUAS. Se denomina *fracción continua finita* $\frac{P_n}{Q_n}$ la expresión de tipo

$$\frac{P_n}{Q_n}=b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\ddots+\cfrac{a_n}{b_n}}}}. \tag{8.95}$$

Las magnitudes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ suelen llamarse *numeradores parciales*, y $b_0, b_1, \ldots, b_n$, *denominadores parciales*.

Las fracciones continuas

$$\frac{P_0}{Q_0}=\frac{b_0}{1},\quad \frac{P_1}{Q_1}=b_0+\frac{a_1}{b_1},\quad \frac{P_2}{Q_2}=b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2}},\ \ldots \tag{8.96}$$

se denominan fracciones *convenientes* para la fracción $\frac{P_n}{Q_n}$.

Si tomamos $P_{-1}=1$ y $Q_{-1}=0$, entonces de las expresiones (8.96) para las fracciones convenientes $\frac{P_k}{Q_k}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ se puede obtener las siguientes fórmulas que ligan P_k con P_{k-1} y P_{k-2} y Q_k con Q_{k-1} y Q_{k-2}:

$$\left.\begin{aligned} P_k&=b_kP_{k-1}+a_kP_{k-2},\\ Q_k&=b_kQ_{k-1}+a_kQ_{k-2}. \end{aligned}\right\} \tag{8.97}$$

Necesitamos una fórmula especial para la fracción $\frac{P_n}{Q_n}$ determinada por la relación (8.95). Para establecer esta fórmula, comparemos dos fracciones convenientes $\frac{P_k}{Q_k}$ y $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$. La diferencia de estas fracciones es obviamente igual a

$$\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}=\frac{P_kQ_{k-1}-Q_kP_{k-1}}{Q_{k-1}Q_k}. \tag{8.98}$$

En virtud de (8.97), el numerador del miembro derecho de (8.98) puede escribirse en la forma

$$P_kQ_{k-1}-Q_kP_{k-1}=(b_kP_{k-1}+a_kP_{k-2})\,Q_{k-1}-(b_kQ_{k-1}+a_kQ_{k-2})\,P_{k-1}= \\ =-a_k\,(P_{k-1}Q_{k-2}-Q_{k-1}P_{k-2}). \tag{8.99}$$

Empleando sucesivamente la relación (8.99) para los valores k, $(k-1)$, $(k-2)$, $\ldots$, 1 y teniendo en cuenta que $P_{-1}=1$, $Q_{-1}=0$, $Q_0=1$, daremos a la fracción (8.98) la forma siguiente:

$$\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}=(-1)^{k+1}\,a_ka_{k-1}\ldots a_1\,\frac{1}{Q_{k-1}Q_k}. \tag{8.100}$$

Ya que

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_0}{Q_0}+\left(\frac{P_1}{Q_1}-\frac{P_0}{Q_0}\right)+\left(\frac{P_2}{Q_2}-\frac{P_1}{Q_1}\right)+\ldots+\left(\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right),$$

entonces, empleando (8.100), obtenemos la fórmula especial necesaria para la fracción $\frac{P_n}{Q_n}$:

$$\frac{P_n}{Q_n}=b_0+\frac{a_1}{Q_0Q_1}-\frac{a_1a_2}{Q_1Q_2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{a_1a_2\ldots a_n}{Q_{n-1}Q_n}. \qquad (8.101)$$

2. DESARROLLO DE LA FUNCIÓN th x EN LA FRACCIÓN CONTINUA. El método de desarrollo de la función th x en la fracción continua empleado en este punto fue propuesto por Schlömilch *) para desarrollar la función tg x en la fracción continua.

Consideremos la función $y=\operatorname{ch}\sqrt{x}$ para los valores $x>0$. Son evidentes las siguientes identidades que se obtienen diferenciando sucesivamente la función dada y haciendo transformaciones simples:

$$2\sqrt{x}y'=\operatorname{sh}\sqrt{x},\quad 2\sqrt{x}y''+\frac{y'}{\sqrt{x}}-\frac{y}{2\sqrt{x}}=0.$$

De la última relación obtenemos la identidad válida para todos los $x>0$:

$$4xy''+2y'-y=0. \qquad (8.102)$$

Diferenciando sucesivamente la identidad (8.102), tendremos

$$\left.\begin{aligned}&4xy'''+6y''-y'=0,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&4xy^{(n+2)}+(4n+2)\,y^{(n+1)}-y^{(n)}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (8.103)$$

Denotemos la relación $\frac{y^{(n+1)}}{y^{(n)}}$ mediante u_{n+1}. Entonces, de la última relación de (8.103) obtenemos la identidad $4xu_{n+2}+4n+2=\frac{1}{u_{n+1}}$, de la cual se desprende la relación

$$u_{n+1}=\frac{1/2}{2n+1+2xu_{n+2}}. \qquad (8.104)$$

Puesto que $u_1=\frac{y'}{y}=\frac{\operatorname{th}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, entonces, para $n=0$, la relación (8.104) puede escribirse en la forma siguiente:

$$\operatorname{th}\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x}}{1+2xu_2}.$$

En el miembro derecho de esta fórmula sustituimos u_2 por su expresión obtenida empleando (8.104) para $n=1$. Como resultado obtenemos la fórmula

$$\operatorname{th}\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x}}{1+\frac{x}{3+2xu_3}}.$$

En la última relación podemos sustituir u_3 por su expresión obtenida valiéndose de (8.104) para $n=2$. Podemos realizar operaciones de este tipo cualquier número finito de veces. Como resultado, obtenemos el desarrollo de la función th $\sqrt{x}$ en la fracción continua. Sustituyendo en esta relación $\sqrt{x}$ por x,

*) *Schlömilch O.* Ueber den Kettendruch fur tg x.— Zs. Math. und Phys. 2 (1857), 137—165.

hallemos el desarrollo necesario de la función th x en la fracción continua finita. Este desarrollo tiene la forma

$$\operatorname{th} x = \cfrac{x^2}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{x^2}{5+\ddots+\cfrac{x^2}{2n+1+2x^2u_{n+2}}}}} \tag{8.105}$$

3. CÁLCULO DE LOS VALORES DE LA FUNCIÓN th x. ESTIMACIÓN DEL ERROR DE LOS CÁLCULOS. El cálculo de valores de la función th x en el ordenador suele realizarse empleando la fórmula (8.105), en la cual se omite el término $2x^2u_{n+2}$. Además, n se toma igual a 6 ($n=6$) y el valor absoluto de las magnitudes de x se limita al número $\pi/4$.

Estimemos el error para cualquier número n.

Mediante $\overline{\operatorname{th}}\, x$ denotemos el valor aproximado de la función th x obtenido de (8.105) después de omitir el término $2x^2u_{n+2}$. Para determinar la exactitud de cálculos debemos, obviamente, estimar la diferencia $\operatorname{th} x - \overline{\operatorname{th}}\, x$. Observemos que th x y $\overline{\operatorname{th}}\, x$ son fracciones continuas que denotamos por $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ y $\frac{\overline{P}_{n+1}}{\overline{Q}_{n+1}}$, respectivamente.

Vamos a poner los valores de los numeradores parciales a_i, $\overline{a}_i$ y de los denominadores parciales b_i, $\overline{b}_i$ para estas fracciones (la raya por arriba denota las magnitudes que se refieren a la fracción $\frac{\overline{P}_{n+1}}{\overline{Q}_{n+1}}$). Tenemos

$$\left.\begin{array}{l} a_1=\overline{a}_1=x,\ a_2=\overline{a}_2=x^2,\ \ldots,\ a_{n+1}=\overline{a}_{n+1}=x^2, \\ b_0=\overline{b}_0=0,\ b_1=\overline{b}_1=1,\ \ldots,\ b_n=\overline{b}_n=2n-1, \\ b_{n+1}=2n+1+2x^2u_{n+2},\ \ \overline{b}_{n+1}=2n+1. \end{array}\right\} \tag{8.106}$$

Ya que para las fracciones $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ y $\frac{\overline{P}_{n+1}}{\overline{Q}_{n+1}}$, $Q_{-1}=\overline{Q}_{-1}=0$ y $Q_0=\overline{Q}_0=1$, entonces, empleando la fórmula (8.106) y las relaciones (8.97), obtenemos las siguientes igualdades:

$$\left.\begin{array}{l} Q_1=\overline{Q}_1,\ Q_2=\overline{Q}_2,\ \ldots,\ Q_n=\overline{Q}_n, \\ Q_{n+1}=(2n+1+2x^2u_{n+2})\,\overline{Q}_n+x^2\overline{Q}_{n-1}, \\ \overline{Q}_{n+1}=(2n+1)\,\overline{Q}_n+x^2\overline{Q}_{n-1} \end{array}\right\} \tag{8.107}$$

Ahora representemos cada una de las fracciones $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ y $\frac{\overline{P}_{n+1}}{\overline{Q}_{n+1}}$ en la forma (8.101). De las fórmulas (8.106) y (8.107) se desprende que estas representaciones se diferenciarán solamente por los últimos sumandos. Por eso la diferencia $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{\overline{P}_{n+1}}{\overline{Q}_{n+1}}$ será igual a la diferencia de los últimos sumandos de las representaciones de estas fracciones según la fórmula (8.101). Ya que la diferencia de las fracciones consideradas es igual a $\operatorname{th} x - \overline{\operatorname{th}}\, x$, entonces, empleando (8.106),

obtenemos la siguiente fórmula:

$$\operatorname{th} x - \overline{\operatorname{th}}\, x = (-1)^{n+2} x^{2n+1} \left[\frac{1}{Q_n Q_{n+1}} - \frac{1}{\overline{Q}_n \overline{Q}_{n+1}} \right].$$

Empleando las fórmulas (8.107), es fácil transformar esta relación en la forma siguiente:

$$\operatorname{th} x - \overline{\operatorname{th}}\, x = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{\overline{Q}_n \overline{Q}_{n+1}} \left[\frac{2x^2 \overline{Q}_n u_{n+2}}{2x^2 \overline{Q}_n u_{n+2} + (2n+1) \overline{Q}_n + x^2 \overline{Q}_{n-1}} \right]. \qquad (8.108)$$

Para obtener la estimación necesaria utilicemos dos desigualdades siguientes que demostramos a continuación.

Si $x \geqslant 0$, para cualquier $k \geqslant 1$ es válida la desigualdad:

$$\overline{Q}_k \geqslant (2k-1)!! \qquad (8.109)$$

Si $x > 0$ la magnitud u_{n+2} es positiva:

$$u_{n+2} > 0. \qquad (8.110)$$

Pasamos ahora a estimar la diferencia $\operatorname{th} x - \overline{\operatorname{th}}\, x$ para $x > 0$. Ya que para $x > 0$, $u_{n+2} > 0$ (véase (8.110)) y cualquier $\overline{Q}_k > 0$ (véase (8.109)), entonces la expresión entre corchetes en el miembro derecho de la igualdad (8.108) no supera a la unidad. Luego, de (8.109) obtenemos la siguiente desigualdad,

$$\overline{Q}_n \overline{Q}_{n+1} \geqslant [(2n-1)!!]^2 (2n+1)$$

Por eso, cuando $x > 0$, para cualquier número n es válida la siguiente estimación del error:

$$|\operatorname{th} x - \overline{\operatorname{th}}\, x| \leqslant \frac{x^{2n+1}}{[(2n-1)!!]^2 (2n+1)}. \qquad (8.111)$$

Detengámonos en estimar el error para $n = 6$ y para los valores x que satisfacen las desigualdades $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$. Si $n = 6$, el número $2n - 1$ es igual a 11, y el número $2n + 1$, a 13. Ya que $(\pi/4) < 0{,}8$, entonces $x^{13} < (0{,}8)^{13} < 5{,}6 \cdot 10^{-2}$. Es fácil calcular que $11!! = 10\,395$. Por eso, teniendo en cuenta que $2 \cdot 6 + 1 = 13$, de fórmula (8.111) obtenemos que para $n = 6$ el error del cálculo aproximado de $\operatorname{th} x$ no supera a $4 \cdot 10^{-11}$.

Ahora demostremos las desigualdades (8.109) y (8.110).

DEMOSTRACIÓN DE LA DESIGUALDAD (8.109)

Demostremos primeramente la no negatividad de cualquier $\overline{Q}_k$. De las fórmulas (8.106) se desprende la no negatividad de $\overline{b}_k$ y $\overline{a}_k$ para cualquier $k \leqslant n$ cuando $x \geqslant 0$. Ya hemos notado que $\overline{Q}_{-1} = 0$, $\overline{Q}_0 = 1$. De aquí y de la segunda fórmula de (8.97) se desprende la no negatividad de $\overline{Q}_k$ para cualquier $k \leqslant n$.

De la segunda fórmula de (8.97), así como de la no negatividad de a_k y $\overline{Q}_k$ se desprende la desigualdad

$$\overline{Q}_k \geqslant \overline{b}_k Q_{k-1}. \qquad (8.112)$$

Ya que $\overline{Q}_0 = 1$ y $b_k = 2k - 1$ para $1 \leqslant k \leqslant n$, de la desigualdad (8.112) obtenemos sucesivamente $\overline{Q}_1 \geqslant 1$, $\overline{Q}_2 \geqslant 3$, ..., $\overline{Q}_k \geqslant (2k-1)!!$. La validez de la desigualdad (8.109) queda demostrada.

DEMOSTRACIÓN DE LA DESIGUALDAD (8.110).

Es suficiente demostrar que para $x > 0$ todas las derivadas de la función $y = \operatorname{th}\sqrt{x}$ son positivas. De esta manera demostramos evidentemente, la desigualdad (8.110), puesto que

$$u_{n+2} = \frac{y^{(n+2)}}{y^{(n+1)}}.$$

Multiplicando la última relación de (8.103) por $\frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{4}$, podemos escribir esta relación en la forma

$$\left[x^{n+\frac{1}{2}}y^{(n+1)}\right]'=\frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{4}y^{(n)}. \tag{8.113}$$

Cerciorémonos ahora de que

$$\lim_{x\to 0+0}\left[x^{n+\frac{1}{2}}\,y^{(n+1)}(x)\right]=0. \tag{8.114}$$

Para esto basta cerciorarse de que la magnitud

$$x^n y^{(n+1)}(x) \tag{8.115}$$

está acotada para $x\to 0+0$. De las relaciones $y=\operatorname{ch}\sqrt{x}$ e $y'=\frac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ se desprende que $y(x)$ e $y'(x)$ están acotados para $x\to 0+0$. Pero, entonces, de (8.102) se desprende que la magnitud $xy''(x)$ está también acotada para $x\to 0+0$.

Luego, de la última relación de (8.103) se deduce utilizando la inducción, que la magnitud (8.115) está acotada para cualquier número n cuando $x\to 0+0$. Por lo tanto, la relación (8.114) queda demostrada.

Demostremos ahora que para cualquier número n la derivada

$$y^{(n)}(x) \tag{8.116}$$

es positiva para $x>0$. Es evidente que $y^{(0)}(x)=y(x)=\operatorname{ch}\sqrt{x}$ es positiva para $x>0$. Supongamos que para cierto número n la magnitud (8.116) es positiva para $x>0$. Entonces, cerciorémonos de que $y^{(n+1)}(x)$ es positiva para $x>0$. De (8.113) deducimos que la derivada en el miembro izquierdo de (8.113) es positiva para $x>0$, o sea, la función $x^{n+1/2}\,y^{(n+1)}(x)$ crece para $x>0$. Pero, entonces de (8.114) se desprende que esta función es positiva para $x>0$. Pues, $y^{(n+1)}(x)>0$ cuando $x>0$ y la desigualdad (8.110) queda demostrada.

4. CÁLCULO DEL SENO Y COSENO HIPERBÓLICOS Y LA FUNCIÓN EXPONENCIAL. A continuación, mediante el símbolo $S_n(t)$ denotaremos la siguiente fracción continua:

$$S_n(t)=1+\cfrac{t}{3+\cfrac{t}{5+\ddots+\cfrac{t}{2n+1}}}. \tag{8.117}$$

Para el ordenador se elabora el programa para calcular esta fracción continua. Empleando este programa, se puede confeccionar fácilmente el programa para calcular la tangente hiperbólica puesto que, como hemos aclarado en el punto anterior, el valor aproximado de $\operatorname{th} x$ puede calcularse por la fórmula

$$\operatorname{th} x\approx\frac{x}{S_n(x^2)}, \tag{8.118}$$

con tal que en los puntos anteriores hemos también aclarado que si n crece, entonces la exactitud de los cálculos aumenta y el error tiende a cero.

El cálculo de las funciones sh $2x$, ch $2x$, e^{2x} puede reducirse al cálculo de la tangente hiperbólica por medio de las fórmulas

$$\operatorname{sh} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1-\operatorname{th}^2 x}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1+\operatorname{th}^2 x}{1-\operatorname{th}^2 x}, \quad e^{2x} = \frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}.$$

De estas fórmulas y de la relación (8.118) se obtienen las siguientes fórmulas para los valores de las funciones enumeradas:

$$\operatorname{sh} 2x \approx \frac{2S_n(x^2)\cdot x}{S_n^2(x^2)-x^2} \quad \operatorname{ch} 2x \approx \frac{S_n^2(x^2)+x^2}{S_n^2(x^2)-x^2},$$

$$e^{2x} \approx \frac{S_n(x^2)+x}{S_n(x^2)-x}.$$

Está claro que, empleando estas fórmulas y el programa para calcular $S_n(t)$, es fácil confeccionar los programas para calcular sh $2x$, ch $2x$ y e^{2x}.

5. CÁLCULO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS. El desarrollo de la función tg x se hace análogamente al desarrollo de la función th x en la fracción continua.

Consideremos la función $y = \cos\sqrt{x}$ para los valores $x > 0$. Son evidentes las siguientes relaciones obtenidas diferenciando sucesivamente esta función y haciendo transformaciones simples:

$$2\sqrt{x}y' = -\operatorname{sen}\sqrt{x}; \quad 2\sqrt{x}y'' + \frac{y'}{\sqrt{x}} = -\frac{y}{2\sqrt{x}}.$$

De la última relación obtenemos la identidad

$$4xy'' + 2y' + y = 0.$$

Diferenciando sucesivamente esta identidad, tendremos

$$4xy''' + 6y'' + y' = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$4xy^{(n+2)} + (4n+2)\, y^{(n+1)} + y^{(n)} = 0$$

Mediante u_{n+1} denotemos la relación $\frac{y^{(n+1)}}{y^{(n)}}$. Entonces, de la última igualdad obtenemos la igualdad $4xu_{n+2} + 4n + 2 = -\frac{1}{u_{n+1}}$ de la cual se desprende la relación

$$u_{n+1} = \frac{-1/2}{2n+1+2xu_{n+2}}.$$

De aquí, empleando los razonamientos completamente análogos hechos para la tangente hiperbólica, obtenemos el siguiente desarrollo de la función tg x en la fracción continua:

$$\operatorname{tg} x = \cfrac{x}{1+\cfrac{-x^2}{3+\cfrac{-x^2}{5+\ddots+\cfrac{-x^2}{2n+1+2x^2u_{n+2}}}}}.$$

El valor aproximado de tg x se obtiene de esta fórmula al omitir el término $2x^2u_{n+2}$. Teniendo en cuenta la expresión (8.117), este valor aproximado puede

hallarse por la fórmula

$$\operatorname{tg} x \approx \frac{x}{S_n(-x^2)}. \tag{8.119}$$

Igual que en el caso de la tangente hiperbólica, podemos cerciorarnos de que, si n aumenta, la exactitud de los cálculos por la fórmula (8.119) crece y el error tiende a cero.

Empleando las fórmulas del curso de las matemáticas elementales $\operatorname{sen} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ y $\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ y las relaciones (8.119), obtenemos las siguientes fórmulas para calcular los valores aproximados de sen $2x$ y cos $2x$:

$$\operatorname{sen} 2x \approx \frac{2S_n(-x^2)\cdot x}{S_n^2(-x^2) - x^2}, \quad \cos 2x \approx \frac{S_n^2(-x^2) + x^2}{S_n^2(-x^2) - x^2}.$$

Para concluir, notemos que la exactitud de cálculos de todas las funciones mencionadas en los últimos dos puntos no será menor que 10^{-11} para seis iteraciones ($n = 6$) si se observa la condición de que el argumento x no supera a $\pi/4$ en valor absoluto.

Capítulo 9

INVESTIGACIÓN GEOMÉTRICA DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN. DETERMINACIÓN DE VALORES MÁXIMO Y MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN

§ 1. Intervalos de monotonía de una función. Búsqueda de puntos de extremo

1. Búsqueda de intervalos de monotonía de una función. En el § 10 del capítulo anterior hemos establecido algunas condiciones que aseguran *el crecimiento* (o, respectivamente, *el decrecimiento*, *el no crecimiento y el no decrecimiento*) de la función $f(x)$ en cierto intervalo (a, b). Para que sea más cómodo, volvamos a enunciar las condiciones halladas:

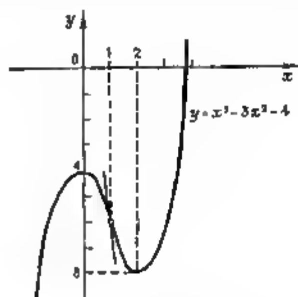


Fig. 9.1

1°. Para que la función $f(x)$ diferenciable en un intervalo a, (b) *no decrezca* (*no crezca*) sobre este intervalo es necesario y suficiente que la derivada de esta función $f'(x)$ sea no negativa (no positiva) en todos los puntos de este intervalo.

2°. Para que la función diferenciable $f(x)$ *crezca* (*decrezca*) sobre el intervalo (a, b) es suficiente que la derivada $f'(x)$ sea positiva (negativa) en todos los puntos de este intervalo.

De este modo, el estudio de los intervalos de monotonía de la función diferenciable $f(x)$ se reduce *a la investigación del signo de la primera derivada de esta función.*

A título de ejemplo examinemos el problema en el cual se buscan los intervalos de monotonía de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$. Ya que $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, entonces, $f'(x)$ es evidentemente

$$\begin{aligned} &\text{positiva si } -\infty < x < 0,\\ &\text{negativa si } \quad 0 < x < 2,\\ &\text{positiva si } \quad 2 < x < +\infty. \end{aligned}$$

De este modo, la función considerada crece en cada una de las semirrectas $(-\infty, 0)$ y $(2, +\infty)$ y decrece en el intervalo $(0, 2)$. La gráfica de esta función está representada en la fig. 9.1.

2. Búsqueda de puntos de extremo posible. En el p. 2 del § 7 del capítulo anterior hemos introducido el concepto de *máximo* (*mínimo*) *local* de la función $f(x)$ y hemos establecido la *condición necesaria*

para que en un punto dado la función $f(x)$ tenga máximo (mínimo) local. Para que sea más cómodo, volvamos a enunciar las definiciones y los resultados establecidos en dicho punto.

Sea la función $f(x)$ definida en todos los puntos de cierto entorno del punto c. Se dice que en el punto c la función $f(x)$ tiene *máximo (mínimo) local* si existe un entorno del punto c tal que entre sus límites el valor $f(c)$ es el máximo (el mínimo) entre todos los demás valores de esta función.

El máximo local y el mínimo local se denominan *extremo.*

El siguiente teorema establece *la condición necesaria del extremo de una función diferenciable: si la función $f(x)$ es diferenciable en el punto c y tiene extremo en este punto,* entonces, $f'(c) = 0$.

De este modo, para hallar los puntos de extremo posible de la función diferenciable $f(x)$, hay que determinar todas las raíces de la ecuación $f'(x) = 0$ (es decir, hallar todos los ceros de la derivada $f'(x)$). En adelante, las raíces de la ecuación $f'(x) = 0$ denominaremos puntos de *extremo posible* de la función $f(x)$ *).

Sin embargo, observemos que, como la igualdad de la primera derivada a cero es *solamente* condición *necesaria* **) de extremo, hay que investigar complementariamente el problema de la existencia del extremo en todo punto de extremo posible. Para hacer esta investigación complementaria tenemos que establecer *condiciones suficientes de la existencia del extremo.* Pasamos a hacerlo.

3. Primera condición suficiente de extremo.

Teorema 9.1. *Sea que un punto c es punto de extremo posible de la función $f(x)$ y sea que la función $f(x)$ es diferenciable en todos los puntos de un entorno del punto c. Entonces, si entre los límites de dicho entorno la derivada $f'(x)$ es positiva (negativa) a la izquierda del punto c y negativa (positiva) a la derecha del punto c, la función $f(x)$ tiene máximo (mínimo) local en el punto c. Si la derivada $f'(x)$ tiene el mismo signo a la izquierda y a la derecha del punto c, entonces en el punto c no hay extremo.*

DEMOSTRACIÓN. 1) Sea primero que entre los límites de dicho entorno la derivada $f'(x)$ es positiva (negativa) a la izquierda del punto c y negativa (positiva) a la derecha del punto c. Es necesario demostrar que el valor $f(c)$ es el máximo (mínimo) entre todos los valores de $f(x)$ en dicho entorno. Mediante x_0 denotemos *cualquier* valor del argumento de dicho entorno diferente de c. Basta demostrar que

$$f(c) - f(x_0) > 0 \quad (<0).$$

*) Las raíces de la ecuación $f'(x) = 0$ se denominan a veces *puntos estacionarios.*

**) Esta condición no es suficiente lo que se desprende, por lo menos, de la investigación de la función $y = x^3$. Esta función no tiene extremo en el punto $x = 0$ donde $f'(x) = 0$.

La función $f(x)$ es diferenciable (y, por lo tanto, continua) en el segmento $[c, x_0]$. Aplicando el teorema 8.12 de Lagrange a $f(x)$ por el segmento $[c, x_0]$, tendremos

$$f(c) - f(x_0) = f'(\xi)(c - x_0), \tag{9.1}$$

donde ξ es cierto valor del argumento comprendido entre c y x_0. Ya que la derivada $f'(\xi)$ es positiva (negativa) para $x_0 < c$ y negativa (positiva) para $x_0 > c$, entonces el miembro derecho de (9.1) es positivo (negativo).

2) Sea ahora que la derivada $f'(x)$ tiene el mismo signo tanto a la izquierda como a la derecha del punto c. Denotando, igual que anteriormente, mediante x_0 *cualquier* valor del argumento diferente de c y repitiendo los razonamientos hechos anteriormente, demostremos que el miembro derecho de (9.1) tiene *diferentes* signos para $x_0 < c$ y para $x_0 > c$. Esto demuestra que en el punto c no hay extremo.

La regla que se desprende del teorema 9.1 puede enunciarse brevemente del modo siguiente: 1) *si al pasar a través del punto de extremo posible dado c la derivada $f'(x)$ cambia el signo de más a menos (de menos a más), entonces en el punto c la función $f(x)$ tiene máximo (mínimo) local*; 2) *si al pasar a través del punto de extremo posible dado c la derivada $f'(x)$ no cambia de signo, entonces en el punto c no hay extremo.*

EJEMPLOS. 1) Suponiendo que una lata de conservas tiene forma de cilindro circular de radio r y altura h, determínese que relación entre r y h garantiza el mayor volumen posible de si su superficie total permanece constante.

Denotemos la superficie total de la lata de conservas mediante S. Entonces,

$$2\pi r^2 + 2\pi rh = S = \text{const}. \tag{9.2}$$

De esta igualdad hallamos que

$$h = \frac{S}{2\pi r} - r.$$

De este modo, podemos expresar el volumen V de la lata de conservas como función del radio r: $V = \pi r^2 h = \frac{S}{2} r - \pi r^3$. El problema se reduce a la búsqueda del máximo de la función $V(r) = \frac{S}{2} r - \pi r^3$. Igualando a cero la derivada $V'(r) = \frac{S}{2} - 3\pi r^2$ y teniendo en cuenta que $r > 0$, hallamos el punto de extremo posible

$$r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}. \tag{9.3}$$

Aunque por el sentido del problema queda claro que el único punto de extremo es el punto del máximo de la función $V(r)$, podemos cerciorarnos estrictamente de esto empleando el teorema 9.1 y observando que la derivada $V'(r) = 3\pi\left(\frac{S}{6\pi} - r^2\right)$ es positiva para $r < \sqrt{S/6\pi}$ y negativa para $r > \sqrt{S/6\pi}$. Establecemos ahora que relación entre el radio r y la altura h garantiza el volumen máximo $V(r)$ de la lata de conservas. Para hacerlo, dividimos la igualdad (9.2) por r^2 y en el miembro derecho de la igualdad obtenida empleamos la relación (9.3). En este caso obtenemos $\frac{h}{r} = 2$, es decir, $h = 2r$.

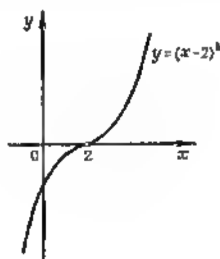


Fig. 9.2

De este modo, *el máximo volumen tendrá la lata cuya altura es igual al diámetro* *).

2) Hállese los puntos de extremo de la función $f(x) = (x-2)^5$. Ya que $f'(x) = 5(x-2)^4$, entonces el único punto de extremo posible es el punto $x = 2$.

Puesto que $f'(x)$ es positiva, tanto a la izquierda como a la derecha de este punto, entonces la función $f(x) = (x-2)^5$ no tiene puntos de extremo (la gráfica de la función $f(x) = (x-2)^5$ se representa en la fig. 9.2).

4. Segunda condición suficiente de extremo. A veces, es difícil determinar el signo de la primera derivada $f'(x)$ a la izquierda y a la derecha del punto de extremo posible. Para este caso, indiquemos otra condición suficiente de la existencia del extremo en el punto de extremo posible dado c que no necesita la investigación del signo de $f'(x)$ en el entorno del c, sino *supone la existencia en el punto c de la segunda derivada finita $f^{(2)}(x)$ diferente de cero.*

Teorema 9.2. *Sea que la función $f(x)$ tiene segunda derivada finita en el punto de extremo finito dado c. Entonces, en el punto c, la función $f(x)$ tiene máximo si $f^{(2)}(c) < 0$, y mínimo si $f^{(2)}(c) > 0$.*

DEMOSTRACIÓN. De la condición $f^{(2)}(c) < 0$ (>0) y del teorema 8.9 se desprende que la función $f'(x)$ decrece (crece) en el punto c. Ya que, según la condición, $f'(c) = 0$, entonces existe un entorno del punto c dentro del cual $f'(x)$ es positiva (negativa) a la izquierda de c y negativa (positiva) a la derecha de c. Pero, entonces, según el teorema anterior, en el punto c $f(x)$ tiene máximo (mínimo).

*) El problema resuelto demuestra que es conveniente fabricar las latas de altura igual al diámetro para ahorrar el metal.

OBSERVACIÓN. Hablando en general, el teorema 9.2 tiene aplicación más estrecha que el teorema 9.1. El teorema 9.2 no resuelve el problema de extremo para el caso cuando la segunda derivada $f^{(2)}(x)$ no existe en el punto c, así como, cuando $f^{(2)}(c) = 0$. En el último caso, para resolver el problema de la existencia del extremo hay que examinar el comportamiento de las derivadas de órdenes superiores en el punto c, lo que haremos en el § 4 del presente capítulo.

EJEMPLOS. 1) En la taza que tiene forma de semiesfera de radio r se ha puesto una varilla homogénea de longitud l (fig. 9.3). Suponiendo que $2r < l < 4r$, hallar la posición de equilibrio de la varilla.

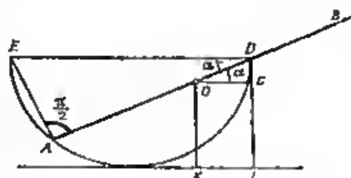


Fig. 9.3

A la posición de equilibrio de la varilla le corresponde el valor mínimo de su energía potencial, es decir, la posición más baja del centro de su gravedad O (puesto que la varilla es homogénea, su centro de gravedad coincide con su punto medio). Denotando mediante OK la perpendicular al plano, en el cual está la taza, reducimos el problema a la búsqueda de la posición de la varilla AB, en la cual el segmento OK tiene la longitud mínima. Ante todo, calculemos la longitud del segmento OK como función del ángulo entre la varilla y el plano, en el cual está la taza. Sea DL paralelo a OK, y OC perpendicular a OK (D es el punto de apoyo de la varilla en el borde de la taza).

Del triángulo rectangular EAD se tiene $AD = ED \cos\alpha = 2r\cos\alpha$. Por la condición, $AO = l/2$. De este modo,

$$OD = AD - AO = 2r\cos\alpha - l/2.$$

Por otra parte, $DC = DL - OK = r - OK$. Por eso, del triángulo rectangular ODC,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{DC}{OD} = \frac{r - OK}{2r\cos\alpha - l/2}.$$

De este modo, la longitud del segmento OK denotada por $f(\alpha)$ es igual a $f(\alpha) = r + \frac{l}{2}\operatorname{sen}\alpha - r\operatorname{sen}2\alpha$.

Pasamos a determinar el valor del ángulo α que da el mínimo de $f(\alpha)$. (Está claro que podemos limitarnos a los valores del ángulo α del primer cuadrante.) Ya que $f'(\alpha) = \frac{l}{2}\cos\alpha - 2r\cos 2\alpha = \frac{l}{2}\cos\alpha + 2r - 4r\cos^2\alpha$, entonces los puntos de extremo

posible se hallan como soluciones de la ecuación cuadrática

$$4r\cos^2\alpha-\frac{l}{2}\cos\alpha-2r=0.$$

Puesto que en el primer cuadrante $\cos\alpha$ es positivo, nos conviene solamente la raíz positiva de esta ecuación

$$\cos\alpha_0=\frac{l+\sqrt{l^2+128r^2}}{16r}. \qquad (9.4)$$

Aunque por el sentido del problema queda claro que el único punto de extremo posible α_0 es punto de mínimo de la función $f(\alpha)$, demostremos eso estrictamente, empleando el teorema 9.2. Es suficiente cerciorarse de que $f^{(2)}(\alpha_0)>0$. Ya que

$$f^{(2)}(\alpha)=-\frac{l}{2}\operatorname{sen}\alpha+4r\operatorname{sen}2\alpha=8r\operatorname{sen}\alpha\left(\cos\alpha-\frac{l}{16r}\right),$$

entonces, en virtud de (9.4),

$$f^{(2)}(\alpha_0)=8r\operatorname{sen}\alpha_0\left(\cos\alpha_0-\frac{l}{16r}\right)=\frac{\operatorname{sen}\alpha_0}{2}\sqrt{l^2+128r^2}>0.$$

Por lo tanto, queda establecido que la posición de equilibrio de la varilla corresponde al ángulo entre la varilla y el plano, en el cual está la taza, determinado por la fórmula (9.4).

2) Hállense los valores de extremo de la función $f(x)=x^3-3x^2-4$. Ya hemos investigado esta función en el p. 1 del presente párrafo (véase la fig. 9.1). Puesto que $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$, entonces la función $f(x)$ tiene dos puntos de extremo posible: $x_1=0$ y $x_2=2$. Ya que es fácil dilucidar el signo de $f'(x)$ a la izquierda y a la derecha de estos puntos, se puede resolver el problema de extremo, empleando el teorema 9.1 (la primera condición suficiente). Pero nos preferimos a utilizar el teorema 9.2 (la segunda condición suficiente). Tenemos

$$f^{(2)}(x)=6x-6,\quad f^{(2)}(0)=-6<0,\quad f^{(2)}(2)=6>0.$$

De este modo, la función $f(x)$ tiene máximo en el punto 0 y mínimo en el punto 2. Los valores extremales de esta función son iguales a

$$f_{\text{máx}}=f(0)=-4,\quad f_{\text{mín}}=f(2)=-8.$$

5. Extremo de la función, no diferenciable en un punto dado. Procedimiento general para determinar extremos. Hasta ahora, hemos estudiado el problema de existencia del extremo de la función $f(x)$ *en tal punto c, en el que la función $f(x)$ es diferenciable.* En este punto examinaremos el problema de existencia del extremo de una función en el punto c que no es diferenciable en dicho punto c pero es diferenciable en todos los puntos de cierto entorno a la derecha y a la izquierda de c.

Resulta que el teorema 9.1 puede generalizarse para el caso de tal función. A saber, tiene lugar la siguiente afirmación.

Teorema 9.3. *Sea la función $f(x)$ diferenciable en todos los puntos de cierto entorno del punto c, excepto, tal vez, el propio punto c, y continua en el punto c.*

Entonces, si entre los límites de dicho entorno la derivada $f'(x)$ es positiva (negativa) a la izquierda del punto c y negativa (positiva) a la derecha del punto c, entonces la función $f(x)$ tiene máximo (mínimo)

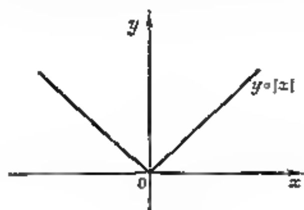


Fig. 9.4

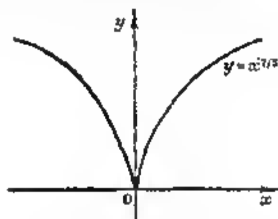


Fig. 9.5

local en el punto c. Si la derivada *$f'(x)$ tiene un mismo signo tanto a la izquierda como a la derecha del punto c, entonces, en el punto c no hay extremo.*

LA DEMOSTRACIÓN coincide en todos los detalles con la demostración del teorema 9.1. Pero esta vez, la posibilidad de aplicar el teorema de Lagrange a la función $f(x)$ por el segmento $[c, x_0]$ se demuestra del modo siguiente: por la condición, la función $f(x)$ es diferenciable (y, por tanto, continua) sobre todo el semisegmento $(c, x_0]$ y, además, continua en el punto c. Por tanto, $f(x)$ es continua sobre todo el segmento $[c, x_0]$ y diferenciable en todos los puntos interiores de este segmento.

EJEMPLOS. 1) Hállense los puntos de extremo de la función $f(x) = |x|$. La función es diferenciable en todos los puntos de la recta infinita, excepto el punto $x = 0$, y continua en el punto $x = 0$, con tal que la derivada $f'(x) = 1$ para $x > 0$ y es igual a -1 para $x < 0$.

El teorema 9.1 no puede aplicarse a esta función, pero, según el teorema 9.3, ella tiene mínimo cuando $x = 0$ (fig. 9.4).

2) Hállense los puntos de extremo de la función $y = x^{2/3}$. Esta función es continua sobre toda la recta infinita y diferenciable en todos los puntos de esta recta, excepto el punto $x = 0$. La derivada, para $x \neq 0$, es igual a

$$y' = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

En el ejemplo anterior la derivada tenía discontinuidad de primera especie *) en el punto $x = 0$; esta vez, la derivada tiene en el punto $x = 0$ discontinuidad de segunda especie («salto infinito»). De la expresión para la derivada deducimos que la derivada es negativa a la izquierda del punto $x = 0$ y positiva a la derecha de este punto. Por tanto, el teorema 9.3 permite comprobar que la función considerada tiene mínimo en el punto $x = 0$ (la gráfica de la función considerada se representa en la fig. 9.5).

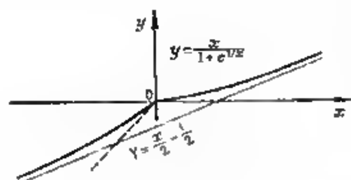


Fig. 9.6

3) Hállense los puntos de extremo de la función

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Es fácil ver que esta función es continua sobre toda la recta infinita. En efecto, el único punto «dudoso» es el punto $x = 0$, pero en este punto la función es continua, puesto que

$$\lim_{x\to 0+0} y = \lim_{x\to 0-0} y = 0.$$

Luego, es obvio que la función considerada es diferenciable en todos los puntos de la recta infinita, excepto el punto $x = 0$. En todos los puntos, excepto ésto, la derivada se determina por la fórmula

$$y' = \frac{1+e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}.$$

Es fácil ver que el límite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ no existe, así que la función $y = f(x)$ no es diferenciable en el punto $x = 0$. Debido a que la derivada y' es positiva, tanto a la izquierda como a la derecha del punto $x = 0$, la función considerada según el teorema 9.3 no tiene extremo en el punto $x = 0$, y, por lo tanto, nunca tiene extremos. (La gráfica de la función considerada se representa en la fig. 9.6.)

Pasamos al procedimiento general para determinar puntos de extremo local. Supongamos que la función $f(x)$ *es continua sobre el*

*) En el sentido de que esta derivada, aunque no existía en el punto $x = 0$ tenía en este punto los valores límite finitos derecho e izquierdo no coincidentes entre sí.

intervalo *) (a, b) *y su derivada* $f'(x)$ *existe y es continua sobre todo este intervalo, excepto un número finito de puntos.*

Además, supongamos que *en el intervalo* (a, b) *la derivada* $f'(x)$ *se anula sólo en un número finito de puntos.* En otras palabras, suponemos que en el intervalo (a, b) existe sólo un número finito de puntos en los cuales la derivada $f(x)$ no existe o se anula. Denotemos estos puntos mediante los símbolos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(a < x_1 < x_2 \ldots < x_n < b)$. En virtud de las suposiciones hechas, la derivada $f'(x)$ *mantiene el signo constante* en cada uno de los intervalos $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_n, b)$. Por lo tanto, *el problema de existencia del extremo en cada uno de los puntos* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *puede resolverse (en sentido positivo o negativo) empleando el teorema 9.8.*

Aquí no ofrecemos el ejemplo que ilustra el procedimiento general para determinar puntos de extremo local. Lo haremos en el § 6.

§ 2. Dirección de convexidad de la gráfica de una función

Supongamos que la función $f(x)$ es diferenciable en todo punto del intervalo (a, b). Entonces, como ya hemos establecido en el p. 4 del § 1 del cap. 5, *existe la tangente a la gráfica de la función* $y = f(x)$



Fig. 9.7

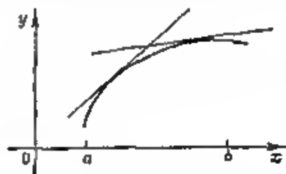


Fig. 9.8

que pasa por cualquier punto $M(x, f(x))$ *de esta gráfica* $(a < x < b)$ *con tal que la tangente no es paralela* **) *al eje* Oy.

Definición. Diremos que *en el intervalo* (a, b) *la gráfica de la función* $y = f(x)$ *tiene convexidad dirigida hacia abajo (hacia arriba) si la gráfica de esta función se encuentra no por debajo (no por encima) de cualquiera de sus tangentes entre los límites de dicho intervalo.*

OBSERVACIÓN 1. El término *«la gráfica se encuentra no por debajo (no por encima) de su tangente»* tiene sentido, puesto que la tangente no es paralela al eje Oy.

En la fig. 9.7 está representada la gráfica de la función que en

*) En vez del intervalo pueden considerarse una semirrecta, la recta infinita y otro conjunto.

**) Puesto que su coeficiente angular, igual a la derivada $f'(x)$, *es finito.*

el intervalo (a, b) tiene convexidad dirigida hacia abajo y, en la fig. 9.8, hacia arriba.

Teorema 9.4. *Si en el intervalo (a, b) la función $y = f(x)$ tiene la segunda derivada finita y si esta derivada es no negativa (no positiva) en todo este intervalo, entonces, en el intervalo (a, b), la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene convexidad dirigida hacia abajo (hacia arriba).*

DEMOSTRACIÓN. Para la precisión, consideremos el caso cuando la segunda derivada $f^{(2)}(x) \geqslant 0$ en todo el (a, b). Mediante c denotemos *cualquier* punto del intervalo (a, b) (fig. 9.9). Es necesario demostrar que la gráfica de la función $y = f(x)$ no se encuentra por debajo de la tangente que pasa por el punto $M(c, f(c))$. Escribimos la ecuación de dicha tangente, denotando su ordenada corriente

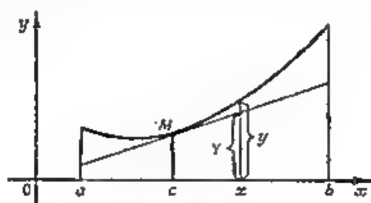


Fig. 9.9

mediante Y. Ya que el coeficiente angular de dicha tangente es igual a $f'(c)$, su ecuación tiene la forma *)

$$Y - f(c) = f'(c)(x - c). \tag{9.5}$$

Desarrollemos la función $f(x)$ en el entorno del punto c por la fórmula de Taylor, tomando en esta fórmula $n = 1$. Obtenemos

$$y = f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(x - c)^2, \tag{9.6}$$

donde el término residual se toma en forma de Lagrange, ξ se comprende entre c y x. Ya que, según la condición, $f(x)$ tiene la segunda derivada en el intervalo (a, b), la fórmula (9.6), es válida para *cualquier* x del intervalo (a, b) (véase el § 13 del cap. 8).

Comparando (9.6) y (9.5), tendremos

$$y - Y = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2}(x - c)^2. \tag{9.7}$$

*) En el fascículo 8 del presente curso se demuestra que la ecuación de la recta que pasa por el punto $M(a, b)$ y tiene el coeficiente angular k, es de la forma $Y - b = k(x - a)$.

Ya que, según la condición, la segunda derivada $\geqslant 0$, en todo el (a, b), entonces el miembro derecho de (9.7) es *no negativo*, o sea, para todos los x de (a, b) $y - Y \geqslant 0$ o bien $y \geqslant Y$.

La última desigualdad demuestra que la gráfica de la función $y = f(x)$, entre los límites del intervalo (a, b), se sitúa no más bajo que la tangente (9.5).

Análogamente se demuestra el teorema para el caso de $f^{(2)}(x) \leqslant \leqslant 0$.

OBSERVACIÓN 2. Si, en todo el intervalo (a, b), $f^{(2)}(x) = 0$, entonces, como es fácil cerciorarse, $y = f(x)$ es función lineal, o sea, su gráfica es línea recta. En este caso, la dirección de convexidad puede ser arbitraria.

Teorema 9.5. *Sea la segunda derivada de la función $y = f(x)$ continua y positiva (negativa) en el punto c. Entonces, existe un entorno del punto c tal que entre sus límites la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene convexidad dirigida hacia abajo (hacia arriba).*

DEMOSTRACIÓN. Según el teorema sobre la estabilidad del signo de una función continua, existe un entorno del punto c tal que entre sus límites la segunda derivada $f^{(2)}(x)$ es positiva (negativa). Conforme al teorema anterior, entre los límites de este entorno la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene la convexidad dirigida hacia abajo (hacia arriba).

De este modo, *la dirección de convexidad de la gráfica de la función se caracteriza completamente por el signo de la segunda derivada de esta función.*

EJEMPLO. Investigar la dirección de convexidad de la gráfica de la función $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$. Ya la hemos considerado en los puntos 1 y 4 del párrafo anterior (véase la fig. 9.1). De la forma de la segunda derivada $f^{(2)}(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$ se desprende que esta derivada es negativa para $x < 1$ y positiva para $x > 1$. De este modo, la convexidad de la gráfica de la función $y = x^3 - 3x^2 - 4$ está dirigida hacia arriba en el intervalo $(-\infty, 1)$ y hacia abajo en el intervalo $(1, \infty)$.

§ 3. Puntos de inflexión de la gráfica de una función

1. Definición del punto de inflexión. Condición necesaria de inflexión. Sean a, b y c tres números vinculados por las desigualdades $a < c < b$. Supongamos que la función $y = f(x)$ es diferenciable en el intervalo (a, b), o sea, existe la tangente a la gráfica de esta función de todos los puntos cuyas abscisas pertenecen al intervalo (a, b). Además, supongamos que la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene dirección determinada de convexidad en cada uno de los intervalos (a, c) y (c, b).

Definición. *El punto $M(c, f(c))$ de la gráfica de la función $y = f(x)$ se denomina **punto de inflexión** de esta gráfica si existe un*

entorno del punto c del eje de abscisas tal que, entre sus límites, la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene direcciones diferentes de convexidad a la izquierda y a la derecha del punto c.

En la fig. 9.10 está representada la gráfica de la función que tiene inflexión en el punto $M(c, f(c))$.

A veces, cuando se hallan los puntos de inflexión de la gráfica de una función $y = f(x)$ se exige complementariamente que *dicha gráfica, entre los límites de todo el entorno bastante pequeño del punto c del eje de abscisas, a la izquierda y a la derecha de c esté situada por los lados diferentes de la tangente a esta gráfica en el punto $M(c, f(c))$.*

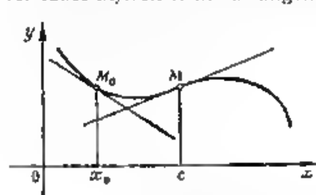


Fig. 9.10

A continuación demostremos que esta propiedad se desprenderá de la definición dada suponiendo que la derivada $f'(x)$ sea continua en el punto c.

Demostremos dos lemas siguientes.

Lema 1. *Sea que la función $y = f(x)$ tiene la derivada $f'(x)$ en todos los puntos de δ-entorno del punto c con tal que esta derivada es continua en el punto c. Entonces, si la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene, en el intervalo $(c, c + \delta)$, la convexidad dirigida hacia abajo (hacia arriba), entonces entre los límites de todo el intervalo $(c, c + \delta)$ esta gráfica se sitúa no más bajo (no más alto) que la tangente a la gráfica trazada en el punto $M(c, f(c))$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos las sucesión $\{x_n\}$ de puntos del intervalo $(c, c + \delta)$ convergente al punto c. Por todo punto $M_n(x_n, f(x_n))$ de la gráfica de la función $y = f(x)$ tracemos la tangente a esta gráfica, o sea, la recta *)

$$Y_n = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

Ya que, según la condición, en el intervalo $(c, c + \delta)$ la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene la convexidad dirigida hacia abajo (hacia arriba), entonces, para cualquier número n y cualquier punto *fijado* x del intervalo $(c, c + \delta)$,

$$f(x) - Y_n = f(x) - f(x_n) - f'(x_n)(x - x_n) \geqslant 0 \quad (\leqslant 0). \qquad (*)$$

De la condición de continuidad de $f'(x)$ y, por lo tanto, de $f(x)$) en el punto c y de la definición de continuidad del p. 1 del § 3 del

*) Empleamos la ecuación de la recta que pasa por el punto dado $M_n(x_n, f(x_n))$ y tiene el coeficiente angular igual a $f'(x_n)$. La ordenada corriente de esta recta se denota por Y_n.

cap. 4 se desprende que existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} (f(x) - Y_n) = \lim_{n\to\infty} \{f(x) - f(x_n) - f'(x_n)(x - x_n)\} =$$
$$= f(x) - f(c) - f'(c)(x - c).$$

De la existencia del último límite, en virtud de la desigualdad (*) y el teorema 3.13 del § 1 del cap. 3, obtenemos que

$$f(x) - f(c) - f'(c)(x - c) \geqslant 0 \quad (\leqslant 0).$$

Si mediante Y denotamos la ordenada corriente de la tangente (9.5) que pasa por el punto $M(c, f(c))$, entonces podemos escribir la última desigualdad en la forma: $f(x) - Y \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$.

Así pues, pasando en la desigualdad (*) al límite para $n \to \infty$ y empleando el teorema 3.13 del cap. 3, obtenemos que

$$f(x) - Y \geqslant 0 \quad (\leqslant 0)$$

para todo punto fijado x del intervalo $(c, c + \delta)$ con tal que Y designe la ordenada corriente de la tangente trazada por el punto $M(c, f(c))$. El lema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. De manera análoga se enuncia y se demuestra el lema 1 para el caso cuando la gráfica de la función tiene dirección determinada de convexidad no en el intervalo $(c, c + \delta)$ sino en el intervalo $(c - \delta, c)$.

Lema 2. *Sea que la función $y = f(x)$ tiene derivada $f'(x)$ en un entorno del punto c con tal que esta derivada sea continua en el punto c. Entonces, si la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene inflexión en el punto $M(c, f(c))$, entonces entre los límites de un δ-entorno bastante pequeño del punto c, a la izquierda y a la derecha de c esta gráfica está situada por los lados diferentes de la tangente trazada por el punto $M(c, f(c))$.*

Para *demostrar* este lema debemos elegir $\delta > 0$ tan pequeño que, en cada uno de los intervalos $(c - \delta, c)$ y $(c, c + \delta)$, la gráfica de la función $y = f(x)$ tenga dirección determinada de convexidad (esta dirección será diferente en los intervalos $(c - \delta, c)$ y $(c, c + \delta)$). Después de eso para demostrar el lema 2 queda por aplicar el lema 1 a la función $y = f(x)$ en cada uno de los intervalos $(c - \delta, c)$ y $(c, c + \delta)$.

El lema 2 permite establecer la condición necesaria de inflexión de la gráfica de la función dos veces diferenciable en un punto dado.

Teorema 9.6. ***(condición necesaria de inflexión de la gráfica de la función dos veces diferenciable).*** *Si en el punto c la función $y = f(x)$ tiene la segunda derivada y la gráfica de esta función tiene inflexión en el punto $M(c, f(c))$, entonces $f^{(2)}(c) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea, igual que anteriormente, Y la ordenada corriente de la tangente $Y = f(c) + f'(c)(x - c)$ que pasa por el punto de la gráfica $M(c, f(c))$.

Consideremos la función

$$F(x) = f(x) - Y = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)$$

igual a la diferencia de $f(x)$ y la función lineal $f(c) + f'(c)(x - c)$.

Igual que la función $f(x)$, la $F(x)$ tiene en el punto c la segunda derivada (y, por eso, tiene la primera derivada en cierto entorno de c con tal que la primera derivada es continua en el punto c). En virtud del lema 2, en un entorno pequeño del punto c, a la izquierda y a la derecha de c la gráfica de la función $y = f(x)$ está situada por los lados diferentes de la tangente que pasa por el punto $M(c, f(c))$, y, por consiguiente, en el entorno pequeño del punto c la función $F(x)$ tiene *signos diferentes* a la izquierda y a la derecha de c.

Por tanto, *la función $F(x)$ no puede tener extremo local en el punto c.*

Supongamos ahora que $f^{(2)}(c) \neq 0$. Entonces, puesto que $F'(x) = f'(x) - f'(c)$, $F^{(2)}(x) = f^{(2)}(x)$, se cumplen las condiciones $F'(c) = 0$, $F^{(2)}(c) \neq 0$ y la función $F(x)$ en virtud del teorema 9.2, tiene extremo local en el punto c. La contradicción obtenida demuestra que la suposición $f^{(2)}(c) \neq 0$ es inválida, o sea, $f^{(2)}(c) = 0$. El teorema queda demostrado.

El hecho de que la igualdad de la segunda derivada a cero es *solamente* la condición *necesaria* de inflexión de la gráfica de la función dos veces diferenciable se desprende, por ejemplo, de la consideración de la gráfica de la función $y = x^4$. Para esta función, la segunda derivada $y^{(2)} = 12x^2$ se anula en el punto $x = 0$ pero su gráfica no tiene inflexión en el punto $M(0, 0)$.

En virtud del teorema 9.6, para hallar todos los puntos de inflexión de la gráfica de la función dos veces diferenciable $y = f(x)$ hace falta considerar todas las raíces de la ecuación $f^{(2)}(x) = 0$.

Debido a que la igualdad de la segunda derivada a cero es solamente la condición necesaria de inflexión, es necesario investigar complementariamente el problema de existencia de la inflexión en todo punto, para el cual $f^{(2)}(x) = 0$. Para realizar esta investigación, debemos establecer las condiciones suficientes de inflexión. Pasamos a hacerlo.

2. Primera condición suficiente de inflexión.

Teorema 9.7. *Sea que la función $y = f(x)$ tiene la segundo derivada en cierto entorno del punto c y $f^{(2)}(c) = 0$. Entonces, si entre los límites de dicho entorno la segunda derivada $f^{(2)}(x)$ tiene signos diferentes a la izquierda y a la derecha de c, la gráfica de esta función tiene inflexión en el punto $M(c, f(c))$.*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, observemos que la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene tangente en el punto $M(c, f(c))$, puesto que de las condiciones del teorema se desprende la existencia de la derivada finita $f'(c)$. Luego, de que $f^{(2)}(x)$ tiene signos diferentes a la

izquierda y a la derecha de c y del teorema 9.4 deducimos que la dirección de convexidad es diferente a la izquierda y a la derecha de c. El teorema queda demostrado.

EJEMPLO. Hállense los puntos de inflexión de la gráfica de la función $y = x^3 - 3x^2 - 4$. La consideramos anteriormente muchas veces (su gráfica está representada en la fig. 9.1). Puesto que $f^{(2)}(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$, entonces el único valor del argumento para el cual la inflexión sea posible, es $x = 1$. Le corresponde el punto de la gráfica $M(1, -6)$. Ya que $f^{(2)}(x)$ tiene signos diferentes para $x > 1$ y para $x < 1$, entonces el punto $M(1, -6)$ es punto de inflexión de la gráfica de la función considerada.

3. Segunda condición suficiente de inflexión. Para el caso cuando la investigación del signo de la segunda derivada en el entorno del punto c no es deseable, enunciemos la segunda condición suficiente de inflexión que supone la existencia de la tercera derivada finita de la función $y = f(x)$ en el punto c.

Teorema 9.8. *Si en el punto c la función $y = f(x)$ tiene la tercera derivada finita y en este punto satisface las condiciones $f^{(2)}(c) = 0$, $f^{(3)}(c) \neq 0$, entonces la gráfica de esta función tiene inflexión en el punto $M(c, f(c))$.*

DEMOSTRACIÓN. De la condición $f^{(3)}(c) \neq 0$ y del teorema 8.9 se desprende que la función $f^{(2)}(x)$ ora crece ora decrece en el punto c. Ya que $f^{(2)}(c) = 0$, tanto en uno como en otro caso existe un entorno del punto c tal que entre sus límites $f^{(2)}(x)$ tiene *signos diferentes a la izquierda y a la derecha de c*. Pero, entonces, según el teorema anterior, la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene inflexión en el punto $M(c, f(c))$.

OBSERVACIÓN. Naturalmente, el teorema 9.8 tiene una aplicación más estrecha que el teorema 9.7. Así, el teorema 9.8. no resuelve el problema de existencia de la inflexión para el caso cuando la función $y = f(x)$ no tiene la tercera derivada finita, así como para el caso de $f^{(3)}(c) = 0$. En el último caso, para resolver el problema de existencia de la inflexión es necesario examinar el comportamiento de las derivadas de órdenes superiores en el punto c, lo que haremos en el § 4 de este capítulo.

Volvamos al ejemplo considerado en el punto anterior y mostremos que el problema de existencia de la inflexión para la gráfica de la función $y = x^3 - 3x^2 - 4$ puede también resolverse si empleamos el teorema 9.8. En efecto, $f^{(3)}(x) = 6 \neq 0$, y, por tanto, según el teorema 9.8. el punto $M(1, -6)$ es punto de inflexión.

4. Algunas generalizaciones de la primera condición suficiente de inflexión. Ante todo, notemos que en las condiciones del teorema 9.7 se puede eliminar la exigencia de la doble diferenciabilidad de la función $y = f(x)$ *en el propio punto c*, manteniendo esta exigencia solamente para los puntos que están situados en cierto entorno a la izquierda y a la derecha de c. Además, debemos suponer complementariamente la existencia de la derivada finita $f'(c)$.

La demostración del teorema 9.7 tomando en consideración dichos cambios coincide literalmente con la demostración anteriormente aducida.

Luego, podemos ponernos de acuerdo en no excluir en la definición del punto de inflexión, el caso cuando en el punto considerado la tangente a la gráfica *es paralela* al eje Oy *). Teniendo en cuenta este acuerdo, en el teorema se puede incluso eliminar la exigencia de la diferenciabilidad de la función $f(x)$ en el propio punto c y enunciar este teorema del modo siguiente.

*Sea que la función $y = f(x)$ tiene la segunda derivada finita en todos los puntos de cierto entorno del punto c, excepto, tal vez, el propio punto c. Luego, sea la función $f(x)$ continua en el punto c y sea que la gráfica de esta función tiene tangente***) *en el punto $M(c, f(c))$. Entonces, si entre los límites de dicho entorno la segunda derivada $f^{(2)}(x)$ tiene signos diferentes a la izquierda y a la derecha del punto c, entonces la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene inflexión en el punto $M(c, f(c))$.*

Fig. 9.11

La demostración de la afirmación enunciada es completamente análoga a la demostración del teorema 9.7.

EJEMPLO. Hállense los puntos de inflexión de la gráfica de la función $y = x^{1/3}$. La función tiene la segunda derivada en todos los puntos de la recta infinita, excepto el punto $x = 0$. En el punto $x = 0$ la función considerada es continua, pero su primera derivada es igual al infinito. Sin embargo, en el punto $(0, 0)$ la gráfica de la función $y = x^{1/3}$ tiene tangente paralela al eje Oy ***) (fig. 9.11). Ya que la segunda derivada

$$y^{(2)} = -\frac{2}{9}\frac{1}{x^{5/3}}$$

tiene signos diferentes a la izquierda y a la derecha del punto $x = 0$, entonces la gráfica de la función $y = x^{1/3}$ tiene inflexión en el punto $(0, 0)$.

§ 4. Tercera condición suficiente de extremo e inflexión

Teorema 9.9. *Sea $n \geqslant 1$ y sea que la función $y = f(x)$ tiene derivada de orden n en un entorno del punto c y derivada de orden $n + 1$ en el propio punto c. Sea, luego, que son válidas las siguientes relaciones:*

$$f^{(2)}(c) = f^{(3)}(c) = \dots = f^{(n)}(c) = 0, \quad f^{(n+1)}(c) \neq 0. \qquad (9.8)$$

Entonces, si n es número ***par****, la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene inflexión en el punto $M(c, f(c))$. Si n es número* ***impar*** *y, además $f'(c) = 0$, la función $y = f(x)$ tiene extremo local en el punto c, o, más exacto, tiene en el punto c mínimo local para $f^{(n+1)}(c) > 0$*

*) Este caso corresponde al valor infinito de $f'(c)$.

**) Aunque sea paralela al eje Oy.

***) Esto se desprende, por ejemplo, de que la gráfica de la función inversa $x = y^3$ tiene en este punto la tangnte $x = 0$.

y máximo local para $f^{(n+1)}(c) < 0$.

DEMOSTRACIÓN. 1) Sea, primero, n un número *par*. Para $n = 2$ al teorema que demostramos coincide con el teorema 9.8 ya demostrado, así que es necesario demostrar sólo para $n \geqslant 4$ *par*.

Sea que n par satisface la condición $n \geqslant 4$. De la condición $f^{(n+1)}(c) \neq 0$ y del teorema 8.9 aplicando a la función $f^{(n)}(x)$ se desprende que la función $f^{(n)}(x)$ ora crece ora decrece en el punto c. Ya que, además, $f^{(n)}(c) = 0$, en ambos casos *existe un entorno bastante pequeño del punto c, entre los límites del cual* $f^{(n)}(x)$ *tiene signos diferentes a la derecha y a la izquierda de c.*

Al observar eso desarrollemos la función $f^{(2)}(x)$ por la fórmula de Taylor con el término residual en forma de Lagrange en el entorno del punto c. Obtenemos que, para todos los x de un entorno bastante pequeño del punto c, entre c y x existe un punto ξ tal que

$$f^{(2)}(x) = f^{(2)}(c) + \frac{f^{(3)}(c)}{1!}(x-c) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-3)!}(x-c)^{n-3} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2}.$$

Las relaciones (9.8) permiten dar a la última igualdad la forma siguiente:

$$f^{(2)}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2}. \tag{9.9}$$

Ya que entre los límites de un entorno bastante pequeño del punto c la función $f^{(n)}(x)$ tiene signos diferentes para $x < c$ y para $x > c$ y ya que ξ siempre está situado entre c y x, obtenemos que $f^{(n)}(\xi)$ (y, en virtud de la paridad de n, todo el miembro derecho de (9.9)) tiene también signos diferentes para $x < c$ y para $x > c$. Pero, entonces, el miembro izquierdo de (9.9), o sea, $f^{(2)}(x)$, entre los límites de un entorno bastante pequeño de c tiene signos diferentes para $x < c$ y para $x > c$. En virtud del teorema 9.7, esto significa que la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene inflexión en el punto $M(c, f(c))$. Para el caso de n par el teorema queda demostrado.

2) Sea ahora que $n \geqslant 1$ es número impar y se supone complementariamente que $f'(c) = 0$. Ya que para $n = 1$ el teorema que demostramos coincide con el teorema 9.2 anteriormente demostrado, es suficiente hacer la demostración para $n \geqslant 3$ *impar*.

Sea que n impar satisface la condición $n \geqslant 3$. Para la precisión hacemos los razonamientos para el caso de $f^{(n+1)}(c) > 0$ puesto que para el caso $f^{(n+1)}(c) < 0$ la demostración es análoga.

De la condición $f^{(n+1)}(c) > 0$ y del teorema 8.9 aplicada a la función $f^{(n)}$ se desprende que la función $f^{(n)}(x)$ crece en el punto c. Ya que, además, $f^{(n)}(c) = 0$, esto significa que *existe un entorno bastante pequeño del punto c entre los límites del cual* $f^{(n)}(x)$ *es negativa a la izquierda de c y positiva a la derecha de c.*

Al observar eso desarrollemos la función $f'(x)$ en el entorno del punto c por la fórmula de Taylor con el término residual en forma de

Lagrange. Obtenemos que para todos los x de un entorno bastante pequeño del punto c entre c y x existe un punto ξ tal que

$$f'(x)=f'(c)+\frac{f^{(2)}(c)}{1!}(x-c)+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2}+$$
$$+\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}. \qquad (9.10)$$

Las relaciones (9.8) y la condición complementaria $f'(c)=0$ permiten escribir la igualdad (9.10) en la forma

$$f'(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}. \qquad (9.11)$$

Ya que ξ siempre está situado entre c y x, entonces para todos los x de un entorno bastante pequeño del punto c la derivada $f^{(n)}(\xi)$ es negativa para $x<c$ y positiva para $x>c$. Para n impar el número $n-1$ es par y, por eso, todo el miembro derecho (y, por tanto, el izquierdo) de (9.11) es negativo a la izquierda de c y positivo a la derecha de c para todos los x de un entorno bastante pequeño de c.

Tomando en consideración el teorema 9.1 esto significa que la función $f(x)$ tiene mínimo local en el punto c. Así pues, para el caso de $f^{(n+1)}(c)>0$, la segunda parte del teorema queda demostrado. Puesto que el caso de $f^{(n+1)}(c)>0$ se considera de modo completamento análogo, el teorema queda demostrado por completo.

EJEMPLO. Investíguese el extremo y la inflexión de la función $f(x)=(x-c)^{n+1}$. Es fácil ver que $f'(c)=f^{(2)}(c)=\ldots=f^{(n)}(c)=0$, $f^{(n+1)}(c)=(n+1)!>0$. Según el teorema 9.9, para $(n+1)$ *par* la función tiene mínimo en el punto $x=c$ (fig. 9.12) y para $(n+1)$ *impar*, la gráfica de la función tiene inflexión en el punto $M(c, 0)$ (fig. 9.13).

§ 5. Asíntotas de la gráfica de una función

Definición 1. Se dice que *la recta $x=a$ es **asíntota vertical** de la gráfica de la función $y=f(x)$ si al menos uno de los valores límite*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \quad \text{o} \quad \lim_{x\to a-0} f(x)$$

es igual a $+\infty$ o $-\infty$.

EJEMPLO. La gráfica de la función $y=\frac{1}{x}$ tiene la asíntota vertical $x=0$ puesto que $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty$ (fig. 9.14).

Luego supongamos que la función $y=f(x)$ está definida para los valores del argumento cualesquiera grandes que sean. Para la precisión, consideraremos los valores cualesquiera grandes que sean de signo *positivo*.

Definición 2. Se dice que *la recta*

$$Y = kx + b \tag{9.12}$$

es ***asíntota oblicua*** *de la gráfica de la función* $y = f(x)$ *para* $x \to +\infty$ *si la función* $f(x)$ *puede representarse en la forma*

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \tag{9.13}$$

donde $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$.

Teorema 9.10. *Para que la gráfica de la función* $y = f(x)$ *tenga*

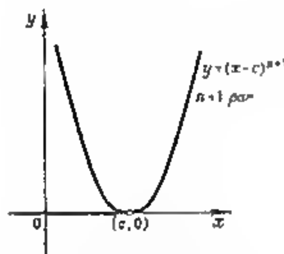


Fig. 9.12

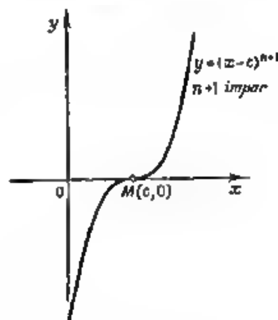


Fig. 9.13

asíntota oblicua para $x \to +\infty$ (fig. 9.12), *es necesario y suficiente que existan dos valores límite*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ y } \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b. \tag{9.14}$$

DEMOSTRACIÓN 1) NECESIDAD. Sea que para $x = +\infty$ la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene asíntota (9.12), o sea, para $f(x)$ es válida la representación (9.13). Entonces,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right] = k,$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to +\infty} [b + \alpha(x)] = b.$$

2) SUFICIENCIA. Sea que existan los valores límite (9.14). El segundo de estos valores límite permite afirmar que la diferencia $f(x) - kx - b$ es infinitesimal para $x \to +\infty$. Denotando esta infinitesimal por $\alpha(x)$, obtenemos la representación (9.13) para $f(x)$. El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. De manera análoga se determina la asíntota oblicua y se demuestra el teorema 9.10 para el caso de $x \to -\infty$.

EJEMPLO. La gráfica de la función $y = \frac{2x^2+x}{x+1} = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}$ tiene la asíntota oblicua $Y = 2x - 1$, tanto para $x \to +\infty$

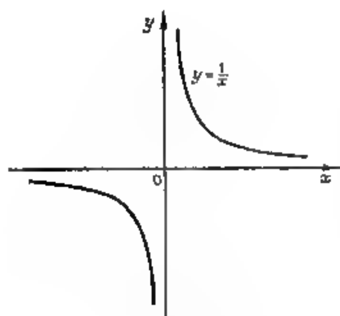


Fig. 9.14

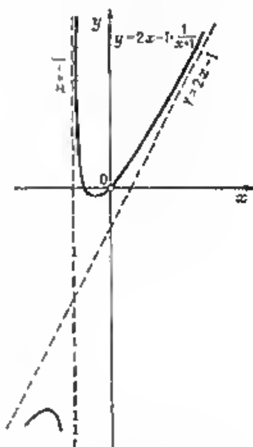


Fig. 9.15

como para $x \to -\infty$, y, además, tiene la asíntota vertical $x = -1$ (fig. 9.15). En efecto,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x}{x(x+1)} = 2,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[-1 + \frac{1}{x+1}\right] = -1,$$

$$\lim_{x\to-1+0} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-1-0} f(x) = -\infty.$$

A la par con la asíntota lineal (9.12) se consideran también asíntotas de forma más complicada.

Se dice que la parábola de orden n determinada por el polinomio

$$Y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \tag{9.12*}$$

es *asíntota de la gráfica de la función* $y = f(x)$ para $x \to +\infty$ si la función $f(x)$ puede representarse en la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 + \alpha(x)$, donde $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$. Es fácil demostrar la siguiente afirmación.

Para que la gráfica de la función $y = f(x)$ *tenga la asíntota* (9.12 *) *para*

$x \to +\infty$, *es necesario y suficiente que existan los* $n+1$ *valores límite siguientes:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^n} = a_n, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-a_n x^n}{x^{n-1}} = a_{n-1}, \ \ldots$$

$$\ldots, \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2)}{x} = a_1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x)] = a_0.$$

§ 6. Procedimiento para investigar la gráfica de una función

En este párrafo exponemos el procedimiento empleando el cual es conveniente investigar la gráfica de la función y ofrecemos el ejemplo que ilustra este procedimiento.

Para investigar cualitativamente la gráfica de la función $y = f(x)$ ante todo es conveniente realizar las siguientes investigaciones:

1°. Precisar el campo de definición de la función.

2°. Aclarar la cuestión sobre la existencia de asíntotas (verticales y oblicuas).

3°. Hallar los campos de crecimiento y decrecimiento de la función y los puntos de extremo.

4°. Hallar los campos de dirección constante de convexidad y los puntos de inflexión.

5°. Hallar los puntos de intersección de la gráfica de la función con el eje Ox.

Por los datos obtenidos es fácil trazar el boceto de la gráfica de la función. A título de ejemplo tracemos la gráfica de la función

$$y = \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2}. \tag{9.15}$$

Seguiremos el procedimiento anteriormente expuesto.

1°. Ya que la función (9.15) es fracción racional, entonces ella está definida y es continua sobre toda la recta infinita, excepto el punto $x = 0$, en el cual el denominador se anula.

2°. Aclaremos el problema de la existencia de asíntotas. Es obvio que

$$\lim_{x\to 0\pm 0} \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2} = -\infty,$$

por eso la gráfica de la función tiene *asíntota vertical* $x = 0$. Luego, de la existencia de los límites

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^3} = \pm \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{14}{x^2} - \frac{6}{x^3}}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - \frac{x}{2}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6 - 2x^3}{4x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm 8} \frac{-5 + \frac{14}{x} - \frac{6}{x^2}}{4} = -\frac{5}{4}$$

se desprende que tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\infty$ la gráfica de la función tiene *asíntota oblicua* $Y = \frac{x}{2} - \frac{5}{4}$.

3°. Para hallar los campos de crecimiento y decrecimiento calculemos la primera derivada de la función (9.15)

$$y' = \frac{x^3 - 7x + 6}{2x^3} = \frac{(x-1)(x-2)(x+3)}{2x^3}.$$

Además, teniendo en cuenta que la propia función y la primera derivada no existen para $x = 0$, obtenemos los siguientes campos de signo constante de y':

Campo de valores x	$-\infty < x < -3$	$-3 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Signo de y'	+	−	+	−	+
Comportamiento de la función	crece	decrece	crece	decrece	crece

De la tabla aducida se desprende que la función tiene los siguientes puntos de extremo:

1) el máximo, si $x = -3$ con tal que $f(-3) = -49/12$,

2) el máximo, si $x = 1$ con tal que $f(1) = 5/4$,

3) el mínimo, si $x = 2$ con tal que $f(2) = 9/8$.

4°. Para hallar los campos de dirección constante de convexidad, calculemos la segunda derivada

$$y^{(2)} = \frac{7x-9}{x^4} = \frac{7\left(x - \frac{9}{7}\right)}{x^4}.$$

Teniendo en cuenta que la propia función y sus derivadas no existen

Campo de valores x	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \frac{9}{7}$	$\frac{9}{7} < x < \infty$
Signo de $y^{(2)}$	—	—	—
Dirección de convexidad de la gráfica	hacia arriba	hacia arriba	hacia abajo

en el punto $x = 0$, obtenemos los siguientes campos de signo constante de $y^{(2)}$:

De la tabla aducida se desprende que la gráfica de la función tiene inflexión en el punto $(9/7, f(9/7))$. Es fácil calcular que $f(9/7) = 913/756$.

5°. Queda por hallar los puntos de intersección de la gráfica con el eje Ox. Estos puntos corresponden a las raíces de la ecuación

$$2x^3 - 5x^2 + 14x - 6 = 0.$$

Es fácil determinar que $2x^3 - 5x^2 + 14x - 6 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 - 2x + 6)$. Ya que el trinomio cuadrático $(x^2 - 2x + 6)$ tiene raí-

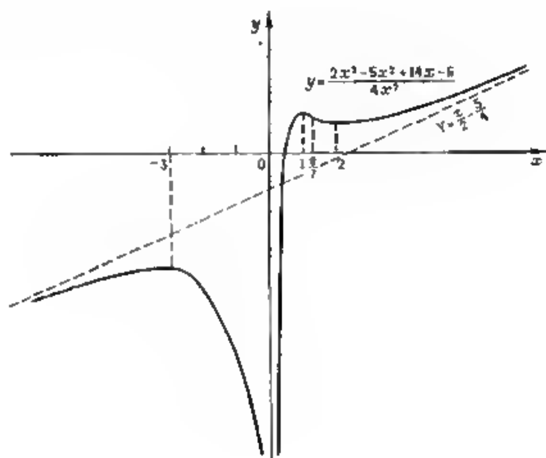


Fig. 9.16

ces complejas, la ecuación considerada tiene solamente una raíz real $x = 1/2$. Por eso, la gráfica de la función interseca el eje Ox en el punto $(1/2, 0)$. Según los datos obtenidos tracemos el boceto de la gráfica de la función considerada (fig. 9.16).

§ 7. Búsqueda de los valores máximo y mínimo de una función. Extremo de frontera

1. Búsqueda de valores máximo y mínimo de una función. Consideremos una función $y = f(x)$ definida y continua sobre un segmento $[a, b]$. Hasta ahora nos hemos interesado sólo en determinar

los máximos y mínimos locales de esta función. Ahora planteemos el problema de *hallar los valores máximo y mínimo* de $f(x)$ en el segmento $[a, b]$. Subrayemos que en virtud del teorema de Weierstrass (véase el § 6 del cap. 8) la función $f(x)$ alcanza obligatoriamente su valor máximo (mínimo) en un punto del segmento $[a, b]$. Para que sea

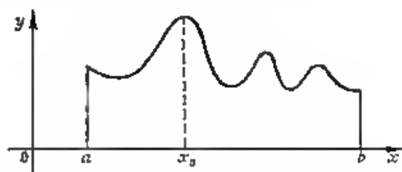


Fig. 9.17

más preciso, detengámonos en determinar el valor máximo de $f(x)$ en el segmento $[a, b]$.

La función $f(x)$ puede alcanzar su valor máximo ora en un punto interior x_0 del segmento $[a, b]$ (entonces, éste coincide con uno de los máximos locales de la función $f(x)$, véase la fig. 9.17) ora en uno de los extremos del segmento $[a, b]$ (fig. 9.18). De aquí es evidente que

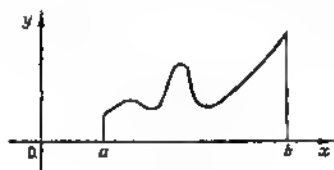


Fig. 9.18

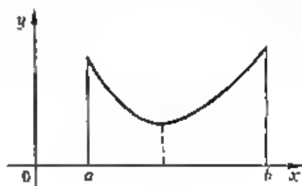


Fig. 9.19

para hallar el valor máximo de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ es necesario comparar uno con otro los valores de $f(x)$ en todos los puntos de máximo local y en los puntos de frontera del segmento a y b. El máximo de estos valores será el valor máximo de $f(x)$ en el segmento $[a, b]$. De manera análoga se halla el valor mínimo de $f(x)$ en el segmento $[a, b]$.

Si deseamos evitar la investigación de los puntos de extremo posible, se puede comparar sencillamente uno con otro los valores de $f(x)$ en todos los puntos de extremo posible y en los puntos de frontera a y b. El máximo (el mínimo) de estos valores será el valor máximo (mínimo) de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$.

Notemos luego que si $f(x)$ tiene en el segmento $[a, b]$ *solamente un punto* de extremo local *) que es punto de máximo (mínimo) local, entonces, sin comparar el valor de $f(x)$ en este punto con $f(a)$ y $f(b)$ se puede afirmar que este valor es el máximo (el mínimo) de $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ (fig. 9.19).

Empleando los métodos análogos se resuelve el problema para hallar el valor máximo (así como, el mínimo) de la función $y = f(x)$ en un intervalo, una semirrecta y la recta infinita (si se observa la condición de que este valor exista).

Puede ocurrir que la función $f(x)$ no tiene puntos de extremo posible en el segmento $[a, b]$ (o en la semirrecta $a \leqslant x < \infty$).

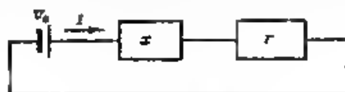


Fig. 9.20

En este caso, $f(x)$ es monótona en este segmento (semirrecta) y sus valores máximo y mínimo se alcanzan en los extremos de este segmento (en el extremo de la semirrecta). Ilustremos el último caso con un ejemplo de la física. Sea que es necesario determinar qué resistencia x hay que conectar al circuito en serie con la resistencia dada r para que en r se consume la potencia máxima (al mismo tiempo, la tensión v_0 de la batería se considera constante, véase la fig. 9.20). Según la ley de Ohm, la corriente I en el circuito es igual a $I = v_0 (r + x)$. Por lo tanto, según la misma ley, la caída de tensión v_r en la resistencia r es igual a $v_r = Ir = v_0 r/(r + x)$. De este modo, la potencia $w(x)$ consumida en la resistencia r es igual a

$$w(x) = Iv_r = v_0^2 r/(r + x)^2.$$

Ya que, según el sentido físico, la resistencia x no puede ser negativa, el problema se reduce a determinar el valor máximo de la función $w(x)$ en la semirrecta $x \geqslant 0$. Calculando la derivada de esta función

$$w'(x) = -\frac{2v_0^2 r}{(r+x)^3},$$

nos cercioramos de que $w'(x) < 0$ en toda la semirrecta $x \geqslant 0$ y que no hay puntos de extremo posible. De este modo, la función $w(x)$ decrece sobre toda la semirrecta $x \geqslant 0$ y alcanza su valor máximo en esta semirrecta si $x = 0$. Este valor es igual a $v_0^2 r$ (fig. 9.21). Esto está claro también por razones físicas.

*) Exactamente este caso se encuentra con frecuencia en la práctica.

Como segundo ejemplo, resolvemos el problema para hallar los valores máximo y mínimo de la función $y = \operatorname{sen}(x^2)$ en el segmento $-\sqrt{\pi} \leqslant x \leqslant \sqrt{5\pi/2}$.

Puesto que $y' = 2x \cos x^2$, dicha función tiene en el segmento considerado tres puntos de extremo posible $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{\pi/2}$. Comparando los valores de la función en dichos puntos y en los extremos del segmento

$$f(0)=0,\ f(\pm\sqrt{\pi/2})=1,\ f(-\sqrt{\pi})=0,$$

$$f\left(\frac{\sqrt{5\pi}}{2}\right)=\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

nos cercioramos de que el valor máximo de la función considerada es igual a $+1$ y se alcanza en dos puntos interiores del segmento $x_1 =$

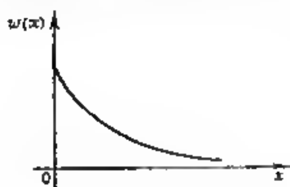


Fig. 9.21

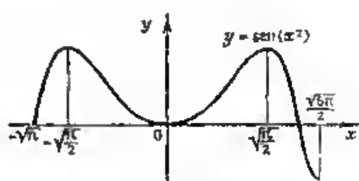


Fig. 9.22

$= -\sqrt{\pi/2}$ y $x_2 = +\sqrt{\pi/2}$, y el valor mínimo de la función considerada es igual a $-\sqrt{2}/2$ y se alcanza en el extremo derecho del segmento $\sqrt{5\pi/2}$.

La gráfica de la función considerada se representa en la fig. 9.22.

2. **Extremo de frontera.** Sea la función $y = f(x)$ definida sobre un segmento $[a, b]$. Diremos que en el punto de frontera b de este segmento la función tiene *máximo de frontera* (*mínimo de frontera*) si existe un semientorno izquierdo del punto b, entre los límites del cual el valor $f(b)$ es el máximo (el mínimo) entre todos los demás valores de esta función. Se definen de modo análogo el máximo de frontera y el mínimo de frontera en el punto de frontera a del segmento $[a, b]$. El máximo de frontera y el mínimo de frontera tienen la denominación común extremo de frontera. Tiene lugar la siguiente ***condición suficiente de extremo de frontera***: *para que la función $y = f(x)$ tenga en el punto b del segmento $[a, b]$ el máximo de frontera (el mínimo de frontera) es suficiente que esta función tenga en el punto b la derivada izquierda positiva (negativa)* *). (La demostración es análoga a la del

*) Para el punto de frontera a, la condición suficiente de máximo de frontera (mínimo de frontera) es la negatividad (la positividad) de la derivada derecha en el punto a.

teorema 8.9). De dicha condición suficiente de extremo de frontera se desprende directamente la siguiente *condición necesaria de extremo de frontera de la función que tiene en el punto b la derivada izquierda*: *para que la función $y = f(x)$ que en el punto b posee la derivada izquierda, tenga máximo de frontera (mínimo de frontera) en este punto, es necesario que dicha derivada sea no negativa (no positiva).*

Para concluir, demostremos la siguiente afirmación notable.

Teorema 9.11 (teorema de Darboux*). *Sea que la función $f(x)$ tiene derivada finita en todos los puntos del segmento $[a, b]$ **) y sea que $f'(a+0) = A$, $f'(b-0) = B$. Entonces, cualquiera que sea un número C comprendido entre A y B, en este segmento existe un punto ξ tal que $f'(\xi) = C$ ***).*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar demostremos la siguiente afirmación: si $F(x)$ tiene derivada finita en $[a, b]$ y si $F'(a+0)$ y $F'(b-0)$ son números de signos diferentes, entonces en el segmento $]a, b[$ existe un punto ξ tal que $F'(\xi) = 0$.

Para la precisión, sea $F'(a+0) < 0$, $F'(b-0) > 0$. Entonces, la función $F(x)$ tiene máximo de frontera en ambos extremos del segmento $[a, b]$. Pero esto significa que el valor mínimo de $F(x)$, en el segmento $[a, b]$, se alcanza en un punto interior ξ de este segmento (la función $F(x)$ es diferenciable y, por tanto, continua en el segmento $[a, b]$ y, por consiguiente, alcanza su valor mínimo en este segmento). En dicho punto ξ, la función $F(x)$ tiene mínimo local y, por eso, $F'(\xi) = 0$.

Para demostrar el teorema 9.11 queda por hacer $F(x) = f(x) - Cx$ y aplicar a $F(x)$ la afirmación que acabamos de demostrar.

OBSERVACIÓN. Del teorema 9.11 volvamos a concluir que la derivada no puede tener puntos de discontinuidad de primera especie (saltos).

*) Gaston Darboux, matemático francés (1842—1917).

**) Se comprende que $f(x)$ tiene derivada en cualquier punto interior del segmento $[a, b]$ y, además, la derivada izquierda en el punto b y la derecha en el punto a.

***) Subrayemos que la continuidad de la derivada $f'(x)$ no se supone.

Apéndice

DESARROLLO ULTERIOR DE LA TEORÍA DE LOS NÚMEROS REALES

Para introducir los números reales, en el cap. 2 hemos utilizado el conjunto de las fracciones decimales infinitas. Al definir las reglas de comparación, adición y multiplicación para el conjunto de estas fracciones, hemos establecido que los elementos de este conjunto poseen 13 *propiedades fundamentales* (enumeradas en el p. 1 del § 1 del cap. 2 para los números racionales). El método descrito para introducir los números reales no es el único posible, a pesar de tener indudables calidades heurísticas y metodológicas. Se podría introducir los números reales empleando las fracciones binarias infinitas, llamadas cortaduras de Dedekind en el campo de los números racionales *), sucesiones de números racionales **) u otros métodos. Para esclarecer las correlaciones entre varios métodos que introducen los números reales, utilicemos algunos conceptos nuevos y establecemos una propiedad importante más del conjunto de los números reales examinados.

1. Completitud del conjunto de los números reales. Dos conjuntos, cada uno de los cuales tiene definidas las reglas de comparación, adición y multiplicación para sus elementos, se denominarán *isomorfos uno a otro respecto a estas reglas* si entre los elementos de estos conjuntos puede establecerse una correspondencia biunívoca ***) de tal modo que si a los elementos a y b del primer conjunto les corresponden los elementos a' y b' del segundo, entonces: 1) los elementos a' y b' están ligados por el mismo símbolo ($>$, $<$ ó $=$) que los elementos a y b; 2) al elemento $a+b$ le corresponde el elemento $a'+b'$; 3) al elemento $a \cdot b$ le corresponde el elemento $a' \cdot b'$.

Análogamente se podría hablar no de las reglas de comparación, adición y multiplicación, sino de cualesquiera otras reglas que caracterizan las relaciones entre los elementos, e introducir el concepto de conjuntos isomorfos uno a otro respecto a las reglas mencionadas.

---

*) El método para introducir los números reales empleando las cortaduras pertenece a R. Dedekind, matemático alemán (1831—1916). Este método se expone, por ejemplo, en el cap. 1 del libro de G. M. Fijtengolts «Fundamentos del análisis matemático», Moscú, 1979 (*en ruso*).

**) Este método para introducir los números reales pertenece a G. Cantor. Su exposición puede encontrarse en el libro de V. V. Nemitski, M. I. Slúdskaia y A. N. Cherkásov «Curso del análisis matemático», tomo I, cap. 2, Moscú, Naúka, 1983 (*en ruso*).

***) En cuanto a la correspondencia biunívoca entre los elementos de dos conjuntos.

El conjunto de los números racionales, introducidos en forma de la razón de números enteros, con las reglas de comparación, adición y multiplicación indicadas en las notas en la pág. 30 y el conjunto de los números racionales puestos en forma de fracciones decimales infinitas con las reglas ordinarias de comparación, adición y multiplicación de los números reales pueden ser ejemplo de dos conjuntos isomorfos uno a otro respecto a las reglas de comparación, adición y multiplicación.

Consideremos más atentamente dos conjuntos: uno de ellos el de todos los números racionales y el otro el de todos los números reales. Para cada uno de estos conjuntos están definidas las reglas de comparación, adición y multiplicación y son válidas 13 propiedades fundamentales. Al mismo tiempo, está claro que el conjunto de todos los números reales es más «amplio» que el conjunto de todos los números racionales, puesto que, *en total, el conjunto de todos los números reales no es isomorfo al conjunto de todos los números racionales respecto a las reglas de comparación, adición y multiplicación* *), *pero en el conjunto de los números reales puede separarse una parte isomorfa al conjunto de todos los números racionales respecto a dichas reglas.*

Lógicamente, surge la pregunta, si puede construirse también para el conjunto de todos los números reales un conjunto más «amplio» de objetos que posea las propiedades siguientes: 1) en este conjunto más «amplio» están definidas las reglas de comparación, adición y multiplicación y son válidas 13 propiedades fundamentales; 2) en total el conjunto más «amplio» no es isomorfo al conjunto de todos los números reales respecto a dichas reglas; 3) en el conjunto más «amplio» puede separarse una parte isomorfa al conjunto de todos los números reales respecto a dichas reglas.

Demostremos que este conjunto más «amplio» *no existe*, o sea, como suele decirse en las matemáticas, *el conjunto de todos los números reales es* **completo** *respecto a las reglas de comparación, adición y multiplicación y 13 propiedades fundamentales.*

En general, *un conjunto arbitrario de objetos, para el cual están definidas algunas reglas y son válidas algunas propiedades, se denomina completo respecto a estas reglas y propiedades si no puede construirse un conjunto más «amplio» de objetos tal que:* 1) *en este conjunto más «amplio» sean definidas las mismas reglas y sean válidas las mismas propiedades;* 2) *en total este conjunto más «amplio» no sea isomorfo al dado respecto a dichas reglas;* 3) *en este conjunto más «amplio» exista una parte isomorfa al conjunto dado respecto a dichas reglas.*

Se puede afirmar que el conjunto de todos los números racionales *no es completo respecto a las reglas de comparación, adición y multiplicación, y 13 propiedades fundamentales*, puesto que existe conjunto

*) Esto se desprende de que entre el conjunto de todos los números racionales y el de todos los números reales no puede establecerse ninguna correspondencia biunívoca (véase el p. 6 del § 4 del cap. 3).

más «amplio» (el de los números reales) que satisface las exigencias 1), 2), y 3) de la definición que acabamos de enunciar.

Demostremos ahora que *el conjunto de todos los números reales es completo respecto a las reglas de comparación, adición y multiplicación y las 13 propiedades fundamentales.*

Supongamos lo contrario, o sea, supongamos que existe un conjunto más «amplio» de objetos $\{x'\}$ tal que: 1) para los elementos del conjunto $\{x'\}$ están definidas las reglas de comparación, adición y multiplicación y son válidas las 13 propiedades fundamentales, 2) en total, el conjunto $\{x'\}$ no es isomorfo al conjunto $\{x\}$ de todos los números reales respecto a dichas reglas, 3) existe una parte del conjunto $\{x'\}$ (se denota por el símbolo $\{\overline{x'}\}$) isomorfa al conjunto de todos los números reales respecto a dichas reglas.

Ante todo, observemos que el conjunto $\{x'\}$ tiene *un solo par* de los elementos 0' y 1' que desempeñan el papel especial del cero y de la unidad *). Luego, se puede afirmar que los elementos 0' y 1' integran el conjunto $\{\overline{x'}\}$ y están en correspondencia biunívoca con los números reales 0 y 1**). Sea α' un elemento del conjunto $\{x'\}$ que *no pertecene* al conjunto $\{\overline{x'}\}$.

En virtud de la regla de comparación, podemos partir todos los elementos $\overline{x'}$ del conjunto $\{\overline{x'}\}$ en *dos clases, superior e inferior* atribuyendo a la clase superior todos los elementos x' que satisfacen la desigualdad $\overline{x'} > \alpha'$, y a la clase inferior, todos los elementos $\overline{x'}$ que satisfacen la desigualdad $\overline{x'} < \alpha'$. Ambas clases no son vacías. En efecto, demostremos, por ejemplo, que la clase superior no es vacía. Repitiendo el elemento 1' como sumando un número de veces bastante grande, en virtud de la propiedad 13°, obtenemos el elemento n' del conjunto $\{\overline{x'}\}$ que satisface la desigualdad $n' > \alpha'$, es decir, pertenece a la clase superior. De la propiedad 1° se desprende que *todo elemento de la clase inferior es menor de cualquier elemento de la clase superior*. En virtud del isomorfismo del conjunto $\{\overline{x'}\}$ y el conjunto $\{x\}$ de todos los números reales se puede afirmar que el conjunto de todos los números reales se parte también en dos clases

---

*) Si existieran dos elementos $0'_1$ y $0'_2$ que interpretarían el papel especial del cero, entonces, en virtud de las propiedades de la suma, obtendríamos que $0'_1 = 0'_1 + 0'_2 = 0'_2 + 0'_1 = 0'_2$, o sea, $0'_1 = 0'_2$. De manera análoga se demuestra la unicidad del elemento 1' que desempeña el papel especial de la unidad.

**) Demostremos, por ejemplo, que el elemento 0' integra el conjunto $\{\overline{x'}\}$ y corresponde biunívocamente al número real 0. Supongamos que al número real 0 le corresponde un elemento θ' del conjunto $\{\overline{x'}\}$ y sea a' cualquier elemento de este conjunto que corresponde al número real a. En virtud del carácter isomorfo respecto a la adición, al elemento $a' + \theta'$ le corresponde el número real $a + 0 = a$, o sea, el elemento $a' + \theta'$ coincide con el elemento a', pero esto significa que θ' es (lel único!) elemento nulo, o sea, $\theta' = 0'$. Análogamente se realizan los razonamientos para el elemento unitario.

con tal que todo número de la clase inferior es menor que cualquier número de la clase superior. Pero esto significa que *la clase inferior de números reales está acotada superiormente y tiene* (de acuerdo con el teorema 2.1) *cota superior exacta m*, *y* la clase superior tiene la cota inferior exacta M. De la definición de las cotas exactas se desprende que ambas cotas m y M se comprenden entre números reales que están a distancia cualquier pequeña que sea uno de otro, y, por eso, $m = M$. Ya que el número $m = M$ es uno de los números reales, entonces partenece a una de las clases, es decir, *existe ora el mínimo elemento en la clase superior ora el máximo elemento en la clase inferior* Demostremos que ambas afirmaciones son absurdas. Sea (para la precisión) que exista el elemento mínimo en la clase superior de los números reales. Entonces, existe también el elemento mínimo m' en la clase superior que corresponde a la partición del conjunto $\{\overline{x'}\}$. Según la definición de la clase superior, $m' > \alpha'$. Conforme a las propiedades de la suma, existe la diferencia $m' - \alpha'$ con tal que, según estas propiedades, $m' - \alpha' > 0'$. Pero, entonces, en virtud de la propiedad 9°, para el elemento $m' - \alpha'$ existe el elemento inverso que, en virtud de las propiedades del producto, es igual al cociente $\frac{1'}{m'-\alpha'}$. Según la propiedad 13°, el elemento $1'$ puede repetirse como sumando tantas veces que el número «entero» obtenido n' pertenezca a $\{\overline{x'}\}$ y satisfaga la desigualdad $n' > \frac{1'}{m'-\alpha'}$. De la última desigualdad, en virtud de las propiedades del producto y de la suma, obtenemos *)

$$m' - \frac{1'}{n'} > \alpha'. \qquad (A.1)$$

Puesto que los elementos m', $1'$ y n' pertenecen al conjunto $\{\overline{x'}\}$, entonces el elemento $\left(m' - \frac{1'}{n'}\right)$ pertenece también a este conjunto y, obviamente, satisface la desigualdad $m' - \frac{1'}{n'} < m'$. Pero, entonces, la desigualdad (A.1) significa que *en la clase superior existe un elemento menor de m', o sea, m' no es el elemento mínimo.* La contradicción obtenida demuestra la completitud del conjunto de los números reales.

2. Introducción axiomática del conjunto de los números reales. El método axiomático de la introducción de los números reales es la conclusión lógica completa de nuestras nociones sobre estos números. Este método consiste en lo siguiente.

El conjunto de los números reales se introduce como el conjunto de objetos de cualquier naturaleza que satisfacen 17 axiomos en calidad de

*) Estas propiedades garantizan la aplicación de todas las reglas del álgebra.

los cuales se toman las reglas de comparación, adición y multiplicación), 13 propiedades fundamentales y el axioma de la completitud respecto a las reglas y propiedades mencionadas.*

Las 17 axiomas mencionadas suelen llamarse *axiomas del número real*. La realización concreta del conjunto de objetos que satisfacen 17 axiomas del número real es el conjunto de fracciones decimales infinitas, examinado en el capítulo 2. Son también posibles otras realizaciones dedicho conjunto de objetos **). Después de aclarar completamente problema de la relación entre estas realizaciones se obtiene la siguiente afirmación notable.

Toda realización $\{x'\}$ del conjunto de objetos que satisfacen 17 axiomas del número real es isomorfa al conjunto anteriormente examinado $\{x\}$ de las fracciones decimales infinitas respecto a las reglas de comparación, adición y multiplicación.

DEMOSTRACIÓN. Para la comodidad, dividamos la demostración en puntos por separado.

1°. Ante todo, observemos que los axiomas garantizan la existencia de los elementos $0'$ y $1'$, que interpretan el papel especial del cero y de la unidad, en el conjunto $\{x'\}$. En virtud del axioma de Arquímedes, $1' > 0'$ ***). En el conjunto $\{x'\}$ separemos el conjunto de «objetos racionales». Para esto, observemos que todo número racional puede obtenerse de los números 0 y 1 efectuando las operaciones de adición, sustracción y división. En efecto, repitiendo el número 1 como sumando un número necesario de veces, obtenemos cualquier número entero positivo n; sustrayendo del número 0 el número 1 un número necesario de veces obtenemos cualquier número entero negativo; mediante la división de dos números enteros obtenemos cualquier número racional. Ya que, según los axiomas, en el conjunto $\{x'\}$ están definidas las operaciones de adición, sustracción y división, entonces, empleando estas operaciones y $0'$ y $1'$, obtenemos «todos los objetos racionales». Denotaremos estos objetos por los mismos símbolos que los números racionales, añadiendo las rayitas.

Demostremos que el conjunto construido de «objetos racionales» del conjunto $\{x'\}$ es isomorfo al conjunto de los números racionales del conjunto $\{x\}$ respecto a las reglas de comparación, adición y multiplicación. En realidad, pongamos en correspondencia al número racional m/n el «objeto racional» m'/n'. Analizando el modo de cons-

*) Se enuncia el postulado solamente de la existencia de las reglas de comparación, adición y multiplicación. Al mismo tiempo, la forma concreta de estas reglas no se indica.

**) En la introducción al presente apéndice ya hemos señalado que los números reales pueden ser introducidos por varios métodos (con ayuda de fracciones binarias infinites, llamadas cortaduras de Dedekind, etc.).

***) En efecto, si fuera válida la desigualdad contraria $1' \leqslant 0'$, entonces, en virtud de los axiomas, de ésta obtendríamos que $1' + 1' + \ldots + 1' \leqslant 0' + 0' + \ldots + 0' = 0'$ (cualquiera que sea el número de veces que tendríamos que repetir $1'$ como sumando). Pero esto contradice el axioma de Arquímedes.

truir los «objetos racionales» se deduce que a la suma y al producto de los números racionales m/n y p/q les correspondo la suma y el producto de los «objetos racionales» m'/n' y p'/q'. Queda por cerciorarse de que m'/n' y p'/q' están ligadas por el mismo signo que m/n y p/q. Ya que en nuestra construcción de «objetos racionales» la regla de comparación de cualesquiera «objetos racionales» utilizando la multiplicación por «objetos enteros» se reduce a la comparación de «objetos enteros», nos queda por cerciorarse de que $m' > n'$ para cualesquiera «objetos enteros» m' y n' si $m > n$. Para comprobarlo basta, en virtud de los axiomas, demostrar que $(n+1)' > n'$. Lo último se desprende de que $1' > 0'$ y, por lo tanto,

$$(n+1)' = n' + 1' > n' + 0' = n'.$$

2°. Sea ahora a' cualquier objeto del conjunto $\{x'\}$. Mostremos que *a este objeto se le puede poner en correspondencia una «fracción decimal infinita» determinada.* Para la precisión, supongamos que $a' > 0'$. En virtud del axioma de Arquímedes, entre los «objetos enteros» estrictamente menores de a' exista el objeto máximo que denotamos por a'_0; entre los «objetos racionales»

$$a'_0, 0'; a'_0, 1'; \ldots; a'_0, 9',$$

estrictamente menores de a' existe el objeto máximo que denotamos por a'_0, a'_1, etc.

De este modo, ponemos en correspondencia a cualquier objeto un conjunto infinito de «objetos racionales»

$$a'_0; a'_0, a'_1; \ldots; a'_0, a'_1 \ldots a'_n; \ldots, \qquad (A.2)$$

o, que es lo mismo, una «fracción decimal infinita»

$$a'_0, a'_1 a'_2 \ldots a'_n \ldots \qquad (A.3)$$

Los mismos razonamientos son también válidos para $a' < 0'$, pero en este caso, todos los objetos de (A.2), igual que la «fracción decimal infinita» (A. 3), tendrán el signo menos.

Al analizar la construcción del conjunto de objetos (A.2) es evidente que para cualquier número n son válidas las desigualdades

$$a'_0, a'_1 a'_2 \ldots a'_n < a' \leqslant a'_0, a'_1 a'_2 \ldots a'_n + \frac{1'}{(10^n)'}, \qquad (A.4)$$

es decir, cualquier objeto a' se comprende entre dos «objetos racionales», la diferencia entre los cuales $\frac{1'}{(10^n)'}$ puede hacerse menor de cualquier objeto «positivo» fijado de antemano *).

*) En efecto, conforme a los axiomas, para cualquier objeto $\varepsilon' > 0'$ existe el elemento inverso $\frac{1'}{\varepsilon'}$, para el cual existe un «objeto entero» n' tal que $n' > \frac{1'}{\varepsilon'}$, así que $\frac{1'}{(10^n)'} < \frac{1'}{n'} < \varepsilon'$.

3°. Demostremos ahora que *si dos objetos* a' *y* b' *pueden comprenderse entre dos «objetos racionales»* α' y β' ($\beta' > \alpha'$), *la diferencia entre los cuales* $\beta' - \alpha'$ *puede hacerse menor de cualquier objeto «positivo» fijado de antemano, entonces* $a' = b'$. Supongamos que $a' \neq b'$. Sea, por ejemplo, $a' < b'$. Entonces, $\alpha'' \leqslant a' < b' \leqslant \beta'$. De estas desigualdades, en virtud de los axiomas, obtenemos

$$0' < b' - a' \leqslant \beta' - \alpha'. \qquad \text{(A.5)}$$

Pero, entonces, para el objeto $b' - a'$ existe el inverso $\frac{1}{b'-a'}$, y para éste existe un «objeto entero» n' tal que

$$n' > \frac{1'}{b'-a'},$$

así que

$$\frac{1'}{n'} < b' - a'.$$

Comparando la última desigualdad y (A.5), obtenemos

$$\frac{1'}{n'} < \beta' - \alpha',$$

lo que contradice al hecho de que la diferencia $\beta' - \alpha'$ puede hacerse menor de cualquier objeto «positivo» fijado de antemano.

4°. Cerciorémonos de que *a dos objetos no iguales del conjunto* $\{x'\}$ *se les pone en correspondencia «fracciones decimales infinitas» diferentes*. En efecto, supongamos que a dos objetos de $\{x'\}$ se les pone en correspondencia una misma «fracción decimal infinita» (por ejemplo, (A.3)). Entonces, en virtud de las desigualdades (A.4), los dos objetos pueden comprenderse entre «objetos racionales», la diferencia entre los cuales puede hacerse menor de cualquier objeto «positivo» fijado de antemano. De acuerdo con el punto 3°, los objetos considerados son iguales. La afirmación demostrada justifica que representamos todo objeto del conjunto $\{x'\}$ mediante una «fracción decimal infinita».

5°. Conforme a los tres primeros axiomas, para los objetos del conjunto $\{x'\}$ están definidas las reglas de comparación, adición y multiplicación. Demostremos que *si todos los objetos del conjunto* $\{x'\}$ *se representan por «fracciones decimales infinitas», entonces para estas «fracciones» las reglas de comparación y las definiciones de la suma y del producto se enuncian de modo exactamente igual que para las fracciones decimales infinitas ordinarias examinadas anteriormente.*

Sean a' y b' dos objetos cualesquiera del conjunto $\{x'\}$ y sea que les corresponden «fracciones decimales infinitas» *)

$$a'_0, a'_1 \ldots a'_n \ldots \text{ y } b'_0, b'_1 \ldots b'_n \ldots \qquad \text{(A.6)}$$

*) Estableciendo la regla de comparación, podemos limitarnos al caso de objetos «positivos» a' y b' puesto que el caso general se reduce a este caso utilizando la regla de los signos.

Ante todo, aclaremos la regla de comparación de los objetos a' y b' representados en forma de las «fracciones decimales infinitas» (A.6). Es suficiente demostrar dos afirmaciones siguientes: 1) si las fracciones (A.6) coinciden, o sea, si

$$a'_0 = b'_0,\ a'_1 = b'_1,\ \ldots,\ a'_n = b'_n,\ \ldots,$$

entonces los objetos a' y b' son iguales; 2) si existe un número n tal que son válidas las relaciones

$$a'_0 = b'_0,\ a'_1 = b'_1,\ \ldots,\ a'_{n-1} = b'_{n-1},\ a'_n < b'_n, \qquad \text{(A.7)}$$

entonces los objetos a' y b' están ligadas por la desigualdad $a' < b'$.

La afirmación 1) ya está demostrada en el p. 4°. Demostremos la afirmación 2). La última de las relaciones (A.7) puede escribirse en la forma

$$a'_n + 1' \leqslant b'_n.$$

Empleando esta relación y las demás relaciones de (A.7) y escribiendo, para a', la derecha de las desigualdades (A.4) y, para b', la izquierda de las desigualdades (A.4), tendremos

$$a' \leqslant a'_0,\ a'_1\ \ldots\ a'_{n-1}a'_n + \frac{1'}{(10^n)'} =$$
$$= a'_0,\ a'_1\ \ldots\ a'_{n-1}(a'_n + 1') \leqslant a'_0,\ a'_1\ \ldots$$
$$\ldots\ a'_{n-1}b'_n < b',\ \text{es decir},\ a' < b'.$$

Demostremos ahora que para los objetos a' y b' son válidas las mismas definiciones de la suma y del producto que para los números reales ordinarios. Limitémonos al caso de la suma. Sean α'_1, α'_2, β'_1, β'_2 todos los «objetos racionales» posibles que satisfacen las desigualdades

$$\alpha'_1 \leqslant a' \leqslant \alpha'_2,\quad \beta'_1 \leqslant b' \leqslant \beta'_2. \qquad \text{(A.8)}$$

Entonces la suma $a' + b'$ de los objetos a' y b' es el único objeto que satisface las desigualdades

$$\alpha'_1 + \beta'_1 \leqslant a' + b' \leqslant \alpha'_2 + \beta'_2. \qquad \text{(A.9)}$$

En efecto, de los axiomas se desprende la posibilidad de adicionar término a término las desigualdades, y de aquí se deduce que la suma $a' + b'$ satisface las desigualdades (A.9). Además, esta suma es el único objeto que satisface las desigualdades (A.9) puesto que cada una de las diferencias

$$\alpha'_2 - \alpha'_1 \text{ y } \beta'_2 - \beta'_1,$$

y, por lo tanto, la diferencia

$$(\alpha_2' + \beta_2') - (\alpha_1' + \beta_1')$$

puede hacerse menor que cualquier objeto «positivo» fijado de antemano (en virtud del p. 2°). De manera análoga se examina el caso del producto.

6°. Demostremos, por fin, que el conjunto $\{x'\}$ es isomorfo al conjunto de los números reales representables mediante fracciones decimales infinitas. Supongamos que el conjunto $\{x'\}$ no es isomorfo a $\{x\}$. Al objeto a' representable por la «fracción decimal infinita» $a_0', a_1'a_2' \ldots$, le pongamos en correspondencia el número real $a = a_0, a_1a_2 \ldots$ Sea que a dos objetos a' y b' les corresponden los números reales a y b.

De los resultados del p. 5 se desprende que 1) a' y b' están ligados por el mismo signo que los números a y b; 2) a la suma $a' + b'$ le corresponde la suma $a + b$; 3) al producto $a' \cdot b'$ le corresponde el producto $a \cdot b$ *).

Ya que, según la suposición, $\{x'\}$ no es isomorfo a $\{x\}$, entonces, en la correspondencia indicada no a todo número real le corresponde algún elemento del conjunto $\{x'\}$. Esto significa que, no siendo isomorfo a todo el conjunto $\{x\}$, el conjunto $\{x'\}$ es isomorfo a una parte del conjunto $\{x\}$, lo que contradice la completitud del conjunto $\{x'\}$.

La contradicción obtenida demuestra la afirmación.

3. Notas finales. Para concluir, observemos que el método axiomático y el concepto de conjuntos isomorfos de objetos (respecto a reglas diferentes) se usan ampliamente en varias ramas de las matemáticas modernas y la física (en la construcción de la geometría, la teoría de probabilidades, mecánica clásica, física estadística, mecánica cuántica **) y otras ramas).

Por ejemplo, en la geometría, el conjunto de los puntos de la recta se introduce como un conjunto de objetos que satisfacen algunos axiomas, entre los cuales desempeña el papel fundamental el axioma de la completitud de este conjunto respecto a los demás axiomas. Dichos axiomas permiten establecer la correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos los puntos de la recta y el conjunto de todos los nú-

---

*) Puesto que la comparación, adición y multiplicación de los objetos a' y b', así como de los números reales a y b, se determinan por las mismas reglas.

**) Así, por ejemplo la mecánica cuántica surgió inicialmente en forma de dos teorías distintas a primera vista: la «Mecánica matricial», de Heisenberg, y la «Mecánica ondulatoria», de Schrödinger. Más tarde fue demostrado que las dos teorías utilizan dos realizaciones concretas isomorfas una a otra de un conjunto común de objetos introducido de modo axiomático y llamado espacio de Hilbert abstracto (véase al respecto, el tomo 3 del presente curso).

meros reales *). Esta correspondencia permite representar los números reales mediante los puntos en la recta (en el eje numérico), lo que se usa ampliamente en el curso del análisis matemático con fines ilustrativos.

*) Véase el Apéndice del fascículo 5 de la presente serie «Geometría analítica» y la exposición más detallada en el libro de N. V. Efímov «Geometría superior», Editorial Mir, Moscú, 1984, §§ 20—23.

INDICE ALFABETICO DE MATERIAS

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica, manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

A. Alenitsin, E. Bútikov, A. Kondrátiev

Breve manual físico-matemático

El trabajo que ofrecemos al lector abarca todos los temas de los primeros cursos de física y matemáticas que se imparten en la actualidad. Contiene las definiciones de los conceptos esenciales de las magnitudes físicas y matemáticas, las formulaciones de las leyes físicas, de los axiomas y teoremas matemáticos, las fórmulas más importantes. La idea que persiguen los autores consiste en ayudar al lector a encontrar rápidamente o a memorizar la información necesaria. La presencia en el libro de información, tanto de física como también de matemáticas, reducida a un sistema concordado, hace más cómoda la aplicación práctica del manual, por ejemplo, en la resolución de problemas.

Recomendamos este trabajo a escolares y profesores de secundaria, a estudiantes de escuelas técnicas profesionales, escuelas de peritaje, a oyentes de los cursos preparatorios para el ingreso en centros de enseñanza superior, así como a estudiantes de institutos pedagógicos y técnicos.